



**P. I. DVORETZKI
I. G. IARMAKHOV**

**ELECTROMAGNETIC
AND HYDRODYNAMIC
TECHNIQUES
TO THE PROBING
AND PERFORMANCE
OF OIL/GAS RESERVOIRS**



**MOSCOW
Nedra Publishing House
1998**

**П. И. ДВОРЕЦКИЙ
И. Г. ЯРМАХОВ**

**ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ
И ГИДРОДИНАМИЧЕСКИЕ
МЕТОДЫ
ПРИ ОСВОЕНИИ
НЕФТЕГАЗОВЫХ
МЕСТОРОЖДЕНИЙ**



Москва

ОАО "Издательство "Негра"

1998

Дворецкий П. И., Ярмахов И. Г. Электромагнитные и гидродинамические методы при освоении нефтегазовых месторождений.— М.: ОАО «Издательство «Недра», 1998.— 318 с.: ил.— ISBN 5-247-03736-7

Предложены новые математические модели и алгоритмы для построения геологического разреза по данным многочастотного радиопросвечивания и решения проблем контроля при интенсивной разработке нефтегазоносных пластов. Приведены аналитические и численные методы исследования гидродинамической интерференции систем горизонтальных скважин при освоении неоднородных коллекторов и изучен характер притока флюида к горизонтальному стволу. Создан принципиально новый метод зондирования неоднородных пространств в окрестности горизонтальных скважин на основе применения сверхкоротких электромагнитных импульсов длительностью около 10^{-9} с.

Для научных и инженерно-технических работников, занимающихся вопросами разработки и эксплуатации нефтяных и газовых месторождений.

Табл. 3, ил. 101, список лит.— 120 назв.

Dvoretzki P. I. and Iarmakhov I. G. Electromagnetic and Hydrodynamic techniques to the probing and performance of oil/gas reservoirs.

A current sheet approximation is extended to the electromagnetic scattering by several inhomogeneous thin layers embedded into the lossy ground. The results are used for the problems of oil/gas reservoir beds detection and evaluation as well as in the problems of reservoirs engineering control.

A new modification of an electromagnetic tool based on the applying a short pulse excitation about $\sim 10^{-9}$ s duration is developed for geophysical prospections of horizontal oil/gas boreholes. Some effective analytical approximations of electromagnetic transients are presented by using the Laplace transform of Sommerfeld-type integrals.

Организация-спонсор РАО «Газпром»

Прогресс в технологии горизонтального бурения нефтегазовых скважин обусловил появление новых теоретических проблем и методов геофизических исследований скважин (ГИС), связанных прежде всего с проводкой горизонтальных скважин и оценкой фильтрационно-емкостных свойств коллекторов. В отличие от вертикальных скважин, где геометрия и физические процессы в приствольном пространстве имеют азимутальную симметрию относительно их оси, физические модели для горизонтальных скважин являются трехмерными.

В данной книге рассматриваются теоретические основы применения новых типов электромагнитных зондов, обладающих пространственно направленной диаграммой излучения. Такие зонды необходимы при проводке горизонтальных скважин сложного профиля для определения положения долота относительно кровли и подошвы пласта в процессе бурения, электрофизических параметров неоднородных околоскважинных зон, коэффициентов анизотропии пласта и трещиноватости горных пород. Разработан принципиально новый метод зондирования неоднородных пространств в окрестности горизонтальных скважин на основе применения сверхкоротких электромагнитных импульсов длительностью примерно 10^{-9} с.

В связи с созданием аппаратуры и методов радиопросвечивания для решения разведочных и контрольно-эксплуатационных задач на газовых и нефтегазовых месторождениях важное значение приобретают новые эффективные электродинамические модели тонких диэлектрических оболочек для расчета полей дифракции электромагнитных волн в неоднородных осадочных структурах. В книге представлены новые математические модели и алгоритмы для построения геологического разреза по данным многочастотного радиопросвечивания и решения проблем контроля при интенсивной разработке нефтегазоносных пластов.

Отдельная глава посвящена созданию эффективных алгоритмов и программ ЭВМ для моделирования процессов разработки месторождений с применением систем горизонтальных скважин. Предложена адекватная обобщенная модель

разработки месторождений нефти и газа горизонтальными скважинами, включающая описание двух пространственно-временных разномасштабных гидродинамических процессов: фильтрации многофазной жидкости в пласте-коллекторе и течения смеси в самом стволе горизонтальной скважины. Разработаны аналитические методы изучения притока флюида к системам горизонтальных скважин, основанные на теории конформных отображений для установившейся фильтрации. Рассмотрен характерный концевой эффект при работе горизонтального ствола — многократное увеличение притока газа к окрестностям в окончании и устье скважины по сравнению с притоком к внутренним участкам ствола. Этот эффект необходимо учитывать при обустройстве горизонтальных скважин.

Для изучения динамики изменения физических свойств коллектора в процессе проникновения фильтрата раствора, определения скорости перемещения и формы контакта фильтрата с пластовым флюидом, исследования изменения толщины глинистой корки в ходе фильтрации применяют две основные модели течения — модели смешивающихся и несмешивающихся жидкостей, описывающие процесс внедрения фильтрата бурового раствора в водоносные и нефте(газо)носные пласты.

Как было отмечено выше, все физические процессы в пространстве вблизи горизонтальных стволов обладают трехмерной неоднородностью. Поэтому наряду с созданием принципиально новых методов каротажа горизонтальных скважин, представленных в главе 4, важное прикладное значение имеет обобщение методики обычных зондов БКЗ для горизонтальных стволов с произвольной азимутальной неоднородностью околоскважинного пространства. Сильная зависимость кривых кажущегося сопротивления от расположения горизонтальной скважины относительно кровли и подошвы пласта конечной толщины, а также от параметра анизотропии его электропроводности обеспечивает высокую эффективность применения метода БКЗ при геофизических исследованиях горизонтальных нефтяных и газовых скважин.

Авторы выражают благодарность В. В. Ремизову, В. З. Гаринову, А. Д. Седых и В. А. Пономареву за советы и постоянную поддержку при выполнении данной работы, С. Б. Попову за большую творческую работу при исследовании математических моделей, Л. Д. Бахраху и коллективу его сотрудников за создание аппаратуры сверхкоротких импульсов и проведение экспериментов.

ЭЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ РАДИОПРОСВЕЧИВАНИЯ ДЛЯ ВЫЯВЛЕНИЯ И ОЦЕНКИ НЕФТЕГАЗОНОСНЫХ ПЛАСТОВ В ОСАДОЧНОЙ ТОЛЩЕ

1.1. МЕТОД ТОНКИХ ОБОЛОЧЕК

В связи с разработкой и созданием аппаратуры и методик радиопросвечивания для решения разведочных и контрольно-эксплуатационных задач на газовых и нефтегазовых месторождениях важное значение приобретают новые эффективные электродинамические модели тонких диэлектрических оболочек для расчета полей дифракции электромагнитных волн в неоднородных осадочных структурах [9].

Для немагнитных материалов в работах [31, 40] предложены модели резистивных оболочек, справедливые для тел с большой по абсолютной величине диэлектрической проницаемостью. В работах [23, 41] рассматривались комбинированные модели резистивных и проводящих оболочек, справедливые для произвольных поляризаций и направлений падающего поля.

В настоящей работе получены интегродифференциальные уравнения и представлены новые методы решения задач дифракции на диэлектрических оболочках, погруженных в неоднородные среды с потерями. Решение задачи дифракции заключается в нахождении эквивалентных токов поляризации как для тангенциальных к поверхности немагнитного слоя, так и для ортогональных компонент в предположении, что плотность токов внутри слоя диэлектрика не меняется по его толщине.

При этом в случае трехмерной задачи дифракции на плоских диэлектрических пластах достигается существенная эффективность вычислительного процесса из-за расщепления процесса на два этапа.

Первый этап заключается в нахождении тангенциальных компонент тока поляризации на поверхности пласта из системы интегродифференциальных уравнений, второй этап — решение интегрального уравнения второго рода для определения ортогональной к поверхности пласта компоненты тока поляризации.

ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧИ

Сформулируем задачу применительно к геофизическим исследованиям неоднородных горных пород с целью выявления и оценки значений электрических параметров нефтегазоносных пластов в осадочной толще. Для обоснования возможности применения в данной ситуации метода тонких диэлектрических оболочек (МТДО) заметим, что толщина реальных нефтегазоносных пластов приблизительно равна 10 м. Принимая во внимание, что длина электромагнитной волны во вмещающих породах при частотах $f \approx 10 \div 100$ кГц равна $300 \div 100$ м, получим, что длина волны во вмещающих породах значительно превышает толщину пласта, т. е. метод тонких диэлектрических оболочек применим для моделирования нефтегазовых залежей.

Рассмотрим тонкий плоский слой толщиной τ из однородного немагнитного диэлектрика с диэлектрической комплексной проницаемостью

$$\varepsilon_L = \varepsilon_0 \varepsilon_{r,L} + i \frac{\sigma_L}{\omega}, \quad \bar{\varepsilon}_L = \varepsilon_L / \varepsilon_0,$$

погруженный во вмещающие породы с диэлектрической проницаемостью

$$\varepsilon_b = \varepsilon_0 \varepsilon_{r,b} + i \frac{\sigma_b}{\omega}, \quad \bar{\varepsilon}_b = \varepsilon_b / \varepsilon_0,$$

где $\sigma = 1/\rho$ (σ — проводимость диэлектрика в См/м, ρ — удельное электрическое сопротивление в Ом·м); $\omega = 2\pi f$.

Начало координат O находится в точке $\tau/2$ внутри пласта так, что плоскость (x, y) параллельна поверхности пласта S , ось z направлена перпендикулярно к пласту. Источником электромагнитного поля $\vec{E}^i, \vec{H}^i$ является магнитный диполь, расположенный в произвольной точке пространства (x_S, y_S, z_S) с произвольной ориентацией в пространстве оси диполя.

Поле, рассеянное пластом, возбуждается объемным током поляризации

$$\vec{J}^v = -i(k_0/\eta_0) \vec{\epsilon}_b (\epsilon_L/\epsilon_b - 1) \vec{E}^{\text{int}},$$

где $\vec{E}^{\text{int}}$ — полное электрическое поле внутри объема слоя (пласта), $\eta_0 = 120\pi$; $k_0 = 2\pi/\lambda_0$, λ_0 — длина волны в свободном пространстве.

Предположение, что пласт тонкий, позволяет осуществить переход от реального пласта к эквивалентному поверхностному току $\vec{J}(x, y)$. При этом считается, что по толщине пласта (слоя) объемные токи поляризации неизменны и равны своим значениям в центре слоя при $z=0$. Иными словами, предполагается, что глубина проникновения поля в материал слоя превышает толщину этого слоя. Для поверхностных токов верно соотношение

$$\vec{J}(x, y) = \frac{\tau k_0 \vec{\epsilon}_b}{2i\eta_0} (\epsilon_L/\epsilon_b - 1) [E^{\text{int}}(x, y, \tau/2) + E^{\text{int}}(x, y, -\tau/2)]. \quad (1.1)$$

Электромагнитное поле $\vec{E}$, $\vec{H}$, рассеянное поверхностными токами поляризации пласта, выражается через векторный и скалярный потенциалы следующим образом:

$$\vec{E}(p) = i\omega \vec{A}(p) + \text{grad}_p \Psi(p),$$

$$\vec{H}(p) = \frac{1}{\mu_0} \text{rot}_p \vec{A}(p),$$

где

$$\vec{A}(p) = \mu_0/4\pi \iint_{(S)} \vec{J}(q) G(p, q) dS_q;$$

$$\Psi(p) = -\frac{1}{i\omega \epsilon_b 4\pi} \iint_{(S)} G(p, q) \text{div } \vec{J}(q) dS_q;$$

$$G(p, q) = \frac{\exp(ik_b r_{pq})}{r_{pq}}; \quad k_b = \frac{2\pi}{\lambda_0} \sqrt{\epsilon_b}; \quad q = (x_q, y_q) \in S;$$

p — точка наблюдения поля; q — точка источника электромагнитного поля; S — поверхность пласта на плоскости $z=0$; μ_0 — магнитная проницаемость свободного пространства.

Интегральные уравнения для нахождения компонент эквивалентного поверхностного тока $\vec{J}(x, y)$ формулируются

согласно следующим условиям непрерывности компонент поля на каждой из поверхностей слоя $S_{z=\tau/2}$, $S_{z=-\tau/2}$:

$$\lim_{p \rightarrow S_{\tau/2}, S_{-\tau/2}} \hat{z}(p) \times [\vec{E}(p) + \vec{E}^i(p) - \vec{E}^{\text{int}}(p)] = 0; \quad (1.2)$$

$$\lim_{p \rightarrow S^-} E_z^{\text{int}}(p) = \lim_{p \rightarrow S^+} \frac{\varepsilon_b}{\varepsilon_L} \left[E_z^i(p) + i\omega A_z(p) + \frac{\partial}{\partial z_p} \Psi(p) \right], \quad (1.3)$$

где S^- , S^+ — внутренние и внешняя стороны каждой из поверхностей слоя $S_{\tau/2}$, $S_{-\tau/2}$.

1.2. ТРЕХМЕРНЫЕ МОДЕЛИ ТОНКИХ ОБОЛОЧЕК

Принимая во внимание соотношения (1.1) и осуществляя предельные переходы при $\tau \rightarrow 0$ в соотношениях (1.2) и (1.3), получаем систему интегродифференциальных уравнений для нахождения компонент эквивалентного тока J_x , J_y , J_z на поверхности S :

$$\begin{aligned} & -DJ_x(p) + \frac{1}{2} \iint_{(S)} J_x G(p, q) dS_q + \\ & + \frac{1}{8\pi^2 \varepsilon_b} \iint_{(S)} \frac{\partial}{\partial x_p} G(p, q) \operatorname{div}_q \vec{J}(q) dS_q = \frac{i}{\eta_0} E_x^i(p), \end{aligned} \quad (1.4)$$

$$\begin{aligned} & -DJ_y(p) + \frac{1}{2} \iint_{(S)} J_y G(p, q) dS_q + \\ & + \frac{1}{8\pi^2 \varepsilon_b} \iint_{(S)} \frac{\partial}{\partial y_p} G(p, q) \operatorname{div}_q \vec{J}(q) dS_q = \frac{i}{\eta_0} E_y^i(p), \end{aligned} \quad (1.5)$$

$$-\frac{\varepsilon_L}{\varepsilon_b} DJ_z(p) + \frac{1}{2} \iint_{(S)} J_z G(p, q) dS_q = \frac{i}{\eta_0} E_z^i(p). \quad (1.6)$$

В уравнениях (1.4)—(1.6) все линейные размеры нормированы на длину волны λ_0 в свободном пространстве,

$$D = \frac{1}{2\pi\tau\bar{\varepsilon}_b(\varepsilon_{r,L}/\varepsilon_{r,b} - 1)},$$

$$\operatorname{div}_q \vec{J}(q) = \frac{\partial J_x(q)}{\partial x_q} + \frac{\partial J_y(q)}{\partial y_q}.$$

Для установления физического смысла уравнений (1.4)—(1.6) рассмотрим предельный переход к случаю идеально проводящей пластинки, $|\varepsilon_L| \rightarrow \infty$. При этом коэффициент D в (1.4), (1.5) стремится к нулю и уравнения (1.4), (1.5) переходят к обычному виду интегродифференциальных уравнений для незамкнутых идеально проводящих оболочек [32]. Уравнение (1.6) при условии $|\varepsilon_L| \rightarrow \infty$ исчезает, что нетрудно установить, анализируя исходное уравнение (1.3), в котором необходимо положить

$$\lim_{|\varepsilon_L| \rightarrow \infty} J_z(p) = \lim_{|\varepsilon_L| \rightarrow \infty} E_z^{\text{int}}(p) = 0.$$

Далее — предельное значение в (1.3) для нормальной производной имеет вид

$$\lim_{p \rightarrow S^+} \frac{\partial}{\partial z_p} \Psi(p) = -\frac{i}{2\omega\varepsilon_b} \operatorname{div} \vec{J}(p),$$

что равно напряженности электрического поля заряженной плоскости, поскольку $\operatorname{div} \vec{J}(p) = i\omega\sigma$ определяет плотность поверхностного заряда. Таким образом, выражение в квадратных скобках в (1.3) отлично от нуля и равно нормальной компоненте полного поля $\vec{E}$ на поверхности идеального проводника. Следовательно, предельное соотношение (1.3) справедливо тождественно при $\varepsilon_L = \infty$.

Выбранная выше форма скалярного потенциала приводит к сингулярным интегродифференциальным уравнениям (1.4), (1.5), в отличие от широко используемых в настоящее время в электродинамике гиперсингулярных уравнений, в которых оператор $\operatorname{grad} \operatorname{div}$ действует на векторный потенциал.

Система уравнений (1.4)—(1.6) решается с применением метода фиктивной области [32]. Для упрощения записи ограничимся рассмотрением диэлектрического слоя в виде тонкой прямоугольной пластинки S . На поверхности S вводится равномерная сетка с шагом h .

Прямыми, параллельными координатным линиям, разобьем всю поверхность на элементы $\Delta S = h^2$. Каждой

центральной точке элемента ΔS_{jk} с координатами центра $q_{jk} = (x_j, y_k)$ ставится в соответствие сеточный аналог тока: тройка комплексных величин $J_{jk}^x, J_{jk}^y, J_{jk}^z$.

В соответствии с методом фиктивной области вводится дополнительное множество ячеек сетки с тем же шагом h , охватывающее кольцо в плоскости S первоначальную область так, что каждый дополнительный элемент ΔS является смежным с каждой приграничной ячейкой основной области S .

На этом дополнительном множестве ячеек нормальная к контуру области S составляющая поверхностного тока J_n полагается равной нулю. С физической точки зрения это требование очевидно, поскольку из условия $J_n = 0$ следует равенство нулю полного заряда на проводящей (диэлектрической) пластинке. С другой стороны, равенство $J_n = 0$ является следствием из условия Майкснера [3, 8], определяющего характер поведения электромагнитного поля в окрестности кромки бесконечно тонкого экрана.

Полагая, что значение тока $\vec{J}$ и поверхностная дивергенция тока $\text{div } \vec{J}$ постоянны в каждой элементарной ячейке ΔS_{jk} основной области S и равны своим значениям в центре этой ячейки, переходим от интегралов в уравнениях (1.4)—(1.6) к конечной сумме интегралов по элементарным ячейкам. Для обеспечения второго порядка аппроксимации выражение с $\text{div } \vec{J}$ в уравнениях (1.4), (1.5) аппроксимируется с помощью центральной разностной производной для каждой ячейки $\Delta S_{jk} \subset S$. Аппроксимация выражения $\text{div } \vec{J}$ в приграничных ячейках основной области S производится с учетом заданных нулевых значений компонент тока в фиктивных узлах.

1. АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДИФРАКЦИИ ПОЛЯ ПРОИЗВОЛЬНО ОРИЕНТИРОВАННОГО МАГНИТНОГО ДИПОЛЯ НА ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ПЛАСТАХ

Для решения задачи нахождения эквивалентных токов поляризации, возбуждаемых магнитным диполем в объеме пласта, вводится основная система координат, ось z которой направлена вдоль оси скважины, начало системы координат O находится в точке расположения диполя (рис. 1.1).

Приняты две ориентации магнитного диполя:

1) вертикальный магнитный диполь (VMD) с магнитным моментом $I_z^m L$, направленным вдоль оси z . Диполь VMD

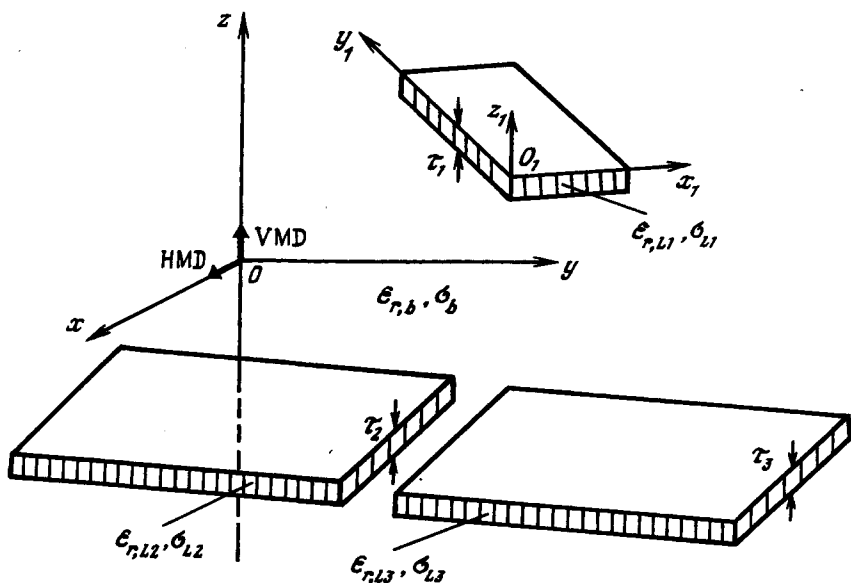


Рис. 1.1. Конфигурация пластин и источников в задачах радиопросвечивания

в окружающем пространстве с комплексным волновым числом k_b возбуждает электрическое поле с компонентами

$$E_x^i(p) = -I_z^m L \frac{(y_p - y_q) \exp(ik_b r_{pq}) (ik_b r_{pq} - 1)}{4\pi r_{pq}^3},$$

$$E_y^i(p) = I_z^m L \frac{(x_p - x_q) \exp(ik_b r_{pq}) (ik_b r_{pq} - 1)}{4\pi r_{pq}^3},$$

$$E_z^i(p) = 0,$$

$(x_q, y_q, z_q) = (0, 0, 0)$ — координаты диполя;

2) горизонтальный магнитный диполь (HMD) с дипольным моментом $I_x^m L$, направленным вдоль оси x . Диполь HMD в окружающем пространстве возбуждает электрическое поле с компонентами

$$E_x^i(p) = 0,$$

$$E_y^i(p) = -I_x^m L \frac{(z_p - z_q) \exp(ik_b r_{pq}) (ik_b r_{pq} - 1)}{4\pi r_{pq}^3},$$

$$E_z^i(p) = I_x^m L \frac{(y_p - y_q) \exp(ik_b r_{pq}) (ik_b r_{pq} - 1)}{4\pi r_{pq}^3}.$$

Далее вводится вспомогательная система координат, связанная с плоским прямоугольным пластом A таким образом, что начало координат O_1 совмещено с одним из углов пласта A . Оси O_1x_1 , O_1y_1 проходят вдоль сторон прямоугольника, ось O_1z_1 направлена ортогонально к плоскости пласта. При наличии второго пласта B аналогичным образом вводится вторая вспомогательная система координат $O_2x_2y_2z_2$, связанная с пластом B .

Переход от системы координат $Oxuz$ к системе $O_1x_1y_1z_1$ ($O_2x_2y_2z_2$) производится в два этапа: сначала происходит параллельный перенос системы $Oxuz$ в точку O_1 , а затем ее вращение для совмещения с координатной системой $O_1x_1y_1z_1$ ($O_2x_2y_2z_2$) с помощью матриц вращения $g^{(1)}$ ($g^{(2)}$). Последние определяются Эйлеровыми углами $\varphi^{(1)}$, $\theta^{(1)}$, $\varphi_1^{(1)}$ ($\varphi^{(2)}$, $\theta^{(2)}$, $\varphi_1^{(2)}$), описывающими ориентацию пластов A (B) в пространстве $Oxuz$.

Векторы электрического и магнитного полей, возбуждаемые диполями VMD, NMD, вычисляются сначала в системе координат $Oxuz$ в точках пластов A , B , а затем с помощью матриц вращения $g^{(1)}$, $g^{(2)}$ проектируются на системы координат, связанные с данными пластами.

Электродинамическое взаимодействие пластов A и B описывают, вводя дополнительные слагаемые в правые части интегродифференциальных уравнений для токов поляризации J_a , J_b в пластах A и B . Эти дополнительные слагаемые описывают поля, возбуждаемые токами одного пласта в точках расположения другого пласта. Поле, возбуждаемое токами поляризации J_a пласта A в точках расположения пласта B находится путем двукратного применения преобразования вращения (сначала из системы координат пласта A в систему координат $Oxuz$, а затем из $Oxuz$ в систему координат пласта B). Аналогичное преобразование выполняется для нахождения поля, возбуждаемого токами поляризации пласта B в точках пласта A .

Пусть в системе координат $Oxuz$ вектор $\vec{E}$ имеет координаты $E = (E_1, E_2, E_3)$. Тогда в системе координат $O_1x_1y_1z_1$ пласта A тот же вектор $\vec{E}$ имеет координаты $E^{(1)} = (E_1^{(1)}, E_2^{(1)}, E_3^{(1)})$. Координаты $E^{(1)}$ получаются из координат E линейным преобразованием с матрицей $g^{(1)T}$

$$E^{(1)} = g^{(1)T} E,$$

где $g^{(1)T}$ — матрица, транспонированная к матрице $g^{(1)}$:

$$g^{(1)} = \begin{array}{cc} \cos \varphi \cos \varphi_1 - \cos \theta \sin \varphi \sin \varphi_1 & \\ \sin \varphi \cos \varphi_1 + \cos \theta \cos \varphi \sin \varphi_1 & \\ \sin \varphi_1 \sin \theta & \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} -\cos \varphi \sin \varphi_1 - \cos \theta \sin \varphi \cos \varphi_1 & \sin \varphi \sin \theta \\ -\sin \varphi \sin \varphi_1 + \cos \theta \cos \varphi \cos \varphi_1 & -\cos \varphi \sin \theta \\ \cos \varphi_1 \sin \theta & \cos \theta \end{array}$$

Матрица $g^{(1)}$ представляет собой результат последовательно проведенных трех следующих движений: 1) вращения вокруг оси z на угол φ ; 2) вращения вокруг нового положения оси x на угол θ ; 3) вращения вокруг новой оси z на угол φ .

2. ФОРМИРОВАНИЕ И ОБРАЩЕНИЕ БЛОЧНО-ТЕПЛИЦИЕВЫХ МАТРИЦ

Как указывалось выше, в рассматриваемой прямоугольной области на плоскости (x, y) вводится равномерная прямоугольная разностная сетка с числом узлов $N = n \times m$, где n, m — число узлов соответственно по направлениям x и y . При этом вся область разбивается на прямоугольные ячейки $\{\Delta S_k\}_{k=1}^N$, $\Delta S_k = (x_k - h/2, x_k + h/2) \cdot (y_k - h/2, y_k + h/2)$, где (x_k, y_k) принадлежат множеству Ω координат центров ячеек; h — размер сторон ячеек (предполагается одним и тем же по обоим направлениям для всех ячеек). На разностной сетке производится аппроксимация интегралов, входящих в исходные интегродифференциальные уравнения (4), (5), (6). Рассмотрим аппроксимацию интегралов вида

$$\iint_S J(q) \cdot G(p, q) dx_q dy_q = \sum_k I_{pqk},$$

$$I_{pqk} = \iint_{\Delta S_k} J(q) \cdot G(p, q) dx_q dy_q = J(q_k) \iint_{\Delta S_k} G(p, q) dx_q dy_q + R(p, q_k),$$

где $J = J_x, J_y, J_z$; $R(p, q_k)$ — погрешность аппроксимации; q_k — центральная точка прямоугольной ячейки сетки ΔS_k ; $q_k \in \Omega$. Будем считать, что точка p в рассматриваемых интегралах также принадлежит множеству координат центров ячеек сетки, $p = p_1 \in \Omega$. Можно показать, что при $p_1 \neq q_k$ $R(p_1, q_k) = O(h^4)$, тогда как при $p_1 = q_k$ $R(p_1, q_k) = O(h^3)$. В самом деле, при $p_1 \neq q_k$, разлагая функцию $J(q)$ в ряд Тейлора в окрестности точки q_k , имеем:

$$\begin{aligned}
I_{pq_k} = & J(q_k) \iint_{\Delta S_k} G(p, q) dx_q dy_q + O(h^6) + \iint_{\Delta S_k} \left[x \frac{\partial J(q_k)}{\partial x} + y \frac{\partial J(q_k)}{\partial y} \right] \times \\
& \times \left[G(p, q_k) + x \frac{\partial G(p, q_k)}{\partial x} + y \frac{\partial G(p, q_k)}{\partial y} \right] dx_q dy_q + \\
& + \frac{1}{2} \iint_{\Delta S_k} \left[x^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} J(q_k) + y^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} J(q_k) + 2xy \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} J(q_k) \right] \times \\
& \times G(p, q_k) dx_q dy_q.
\end{aligned}$$

Очевидно, справедливы равенства

$$\begin{aligned}
\iint_{\Delta S_k} x dx dy = \iint_{\Delta S_k} y dx dy = \iint_{\Delta S_k} xy dx dy = 0, \\
\iint_{\Delta S_k} x^2 dx dy = O(h^4), \quad \iint_{\Delta S_k} y^2 dx dy = O(h^4),
\end{aligned}$$

откуда получаем указанную выше погрешность аппроксимации.

Из этих рассуждений следует, что при $p_1 \neq q_k$ при вычислении интеграла от функции Грина по ячейке сетки можно использовать соотношение

$$\iint_{\Delta S_k} G(p_1, q) dx_q dy_q = G(p_1, q_k) h^2 + O(h^4),$$

оставаясь при этом в рамках прежней погрешности аппроксимации. При $p_1 = q_k$

$$\begin{aligned}
I_{pq_k} = & J(q_k) \iint_{\Delta S_k} G(p, q) dx_q dy_q + O(h^6) + \iint_{\Delta S_k} \left[x \frac{\partial J(q_k)}{\partial x} + y \frac{\partial J(q_k)}{\partial y} \right] \times \\
& \times G(p, q) dx_q dy_q + \frac{1}{2} \iint_{\Delta S_k} \left[x^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} J(q_k) + y^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} J(q_k) + \right. \\
& \left. + 2xy \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} J(q_k) \right] \cdot G(p, q) dx_q dy_q.
\end{aligned}$$

Несложно показать, что в данной ситуации

$$\iint_{\Delta S_k} x G(p, q) dx dy = \iint_{\Delta S_k} y G(p, q) dx dy = 0.$$

Переходя к полярным координатам с центром в точке $p_1 = q_k$, имеем:

$$\iint_{\Delta S_k} x^2 G(p, q) dx dy = 8 \int_0^{\pi/4} \cos^2 \varphi d\varphi \int_0^{R(\varphi)} r^2 \exp(ikr) dr = O(h^3),$$

$$\iint_{\Delta S_k} y^2 G(p, q) dx dy = 8 \int_0^{\pi/4} \sin^2 \varphi d\varphi \int_0^{R(\varphi)} r^2 \exp(ikr) dr = O(h^3),$$

$$\iint_{\Delta S_k} xy G(p, q) dx dy = 8 \int_0^{\pi/4} \cos \varphi \sin \varphi d\varphi \int_0^{R(\varphi)} r^2 \exp(ikr) dr = O(h^3),$$

так как $R(\varphi) = h/(2\cos \varphi)$. Отсюда получаем указанный выше третий порядок погрешности аппроксимации интеграла при $p_1 = q_k$.

Рассмотрим аппроксимацию следующих интегралов, входящих в (1.4), (1.5):

$$\iint_{\Delta S} \frac{\partial}{\partial \alpha_p} G(p, q) \operatorname{div}_q \vec{J}(q) dx_q dy_q = \sum_k M_{pq_k}^\alpha,$$

$$M_{pq_k}^\alpha = \iint_{\Delta S_k} \frac{\partial}{\partial \alpha_p} G(p, q) \operatorname{div}_q \vec{J}(q) dx_q dy_q =$$

$$= \operatorname{div}_q \vec{J}(q_k) \iint_{\Delta S_k} \frac{\partial}{\partial \alpha_p} G(p, q) dx_q dy_q + R^\alpha(p, q_k).$$

Здесь $\alpha = x, y$; $R^\alpha(p, q_k)$ — погрешность аппроксимации, которая при $p \neq q_k$ имеет порядок малости, очевидно, $O(h^4)$. Входящие в оператор дивергенции производные будем, в свою очередь, аппроксимировать с помощью центральных разностей, например:

$$\begin{aligned} \operatorname{div}_q \vec{J}(x, y)|_{q_k = (x_i, y_j)} &= [J_x(x_{i+1}, y_j) - J_x(x_{i-1}, y_j)]/(2h) + \\ &+ [J_y(x_i, y_{j+1}) - J_y(x_i, y_{j-1})]/(2h) + O(h^2). \end{aligned}$$

В итоге получим следующую разностную схему, аппроксимирующую исходную систему уравнений (4), (5), (6):

$$AJ_x + BJ_y = F_x, \quad CJ_x + DJ_y = F_y, \quad HJ_z = F_z,$$

где A, B, C, D, H являются матрицами размерности $(N \times N)$; векторы неизвестных, $J_{x,y,z}$, и правой части, $F_{x,y,z}$, имеют размерность N . Заметим, что для определения элементов этих матриц требуется в общем случае около $O(N^2)$ арифметических действий. Однако в случае равномерной сетки и прямоугольной области элементы этих матриц обладают определенной симметрией, позволяющей существенно сократить число арифметических операций, необходимых для их определения (до величины порядка $O(N)$).

Приведем вид матричных элементов:

$$A_{ik} = a_{ik} + \frac{1}{8\pi^2 \bar{\epsilon}_b} \begin{cases} -b_{i,k+1}^x & \text{при } k_x = 1 \\ b_{i,k-1}^x - b_{i,k+1}^x & \text{при } 1 < k_x < n \\ b_{i,k-1}^x & \text{при } k_x = n, \end{cases}$$

$$B_{ik} = \frac{1}{8\pi^2 \bar{\epsilon}_b} \begin{cases} -b_{i,k+n}^x, & k_y = 1 \\ b_{i,k-n}^x - b_{i,k+n}^x & \text{при } 1 < k_y < m \\ b_{i,k-n}^x, & k_y = m, \end{cases}$$

$$C_{ik} = \frac{1}{8\pi^2 \bar{\epsilon}_b} \begin{cases} -b_{i,k+1}^y, & k_x = 1 \\ b_{i,k-1}^y - b_{i,k+1}^y & \text{при } 1 < k_x < n \\ b_{i,k-1}^y, & k_x = n, \end{cases}$$

$$D_{ik} = a_{ik} + \frac{1}{8\pi^2 \bar{\epsilon}_b} \begin{cases} -b_{i,k+n}^y, & k_y = 1 \\ b_{i,k-n}^y - b_{i,k+n}^y & \text{при } 1 < k_y < m \\ b_{i,k-n}^y, & k_y = m, \end{cases}$$

$$a_{ik} = -D\delta_{ik} + \frac{1}{2} \alpha (|k_x - i_x|, |k_y - i_y|),$$

$$b_{ik}^x = \beta^x (|k_x - i_x|, |k_y - i_y|) \cdot \text{sign}(k_x - i_x + 1/2),$$

$$b_{ik}^y = \beta^y (|k_x - i_x|, |k_y - i_y|) \cdot \text{sign}(k_y - i_y + 1/2),$$

$$H_{ik} = -\frac{\varepsilon_L}{\varepsilon_b} D \delta_{ik} + \frac{1}{2} \alpha (|k_x - i_x|, |k_y - i_y|),$$

$$\delta_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{при } i=k \\ 0 & \text{при } i \neq k. \end{cases}$$

Здесь $1 \leq i, k \leq N$,

$$i_x = i - n \left\lfloor \frac{i-1}{n} \right\rfloor, \quad i_y = 1 + \left\lfloor \frac{i-1}{n} \right\rfloor,$$

$$k_x = k - n \left\lfloor \frac{k-1}{n} \right\rfloor, \quad k_y = 1 + \left\lfloor \frac{k-1}{n} \right\rfloor,$$

[...] — целая часть числа.

Указанный вид элементов матриц обусловлен тем, что вычисляемые интегралы зависят только от разности аргументов:

$$\begin{aligned} \iint_{\Delta S_k} G(p_i, q) dx_q dy_q &= \int_{y_k - h/2}^{y_k + h/2} \int_{x_k - h/2}^{x_k + h/2} G(r(x - x_i, y - y_i)) dx dy = \\ &= \int_{y_k - y_i - h/2}^{y_k - y_i + h/2} \int_{x_k - y_i - h/2}^{x_k - y_i + h/2} G(r(x, y)) dx dy = \alpha(|k_x - i_x|, |k_y - i_y|), \end{aligned}$$

где $G(r) = \exp(ik_b r)/r$, $r(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$;

$$\begin{aligned} \iint_{\Delta S_k} \frac{\partial}{\partial x_p} G(p, q) dx_q dy_q &= - \iint_{\Delta S_k} \frac{\partial}{\partial x_q} G(p, q) dx_q dy_q = \\ &= \int_{y_k - y_i - h/2}^{y_k - y_i + h/2} [G(r(x_k - x_i + h/2, y)) - G(r(x_k - x_i - h/2, y))] dy = \\ &= \beta^x (|k_x - i_x|, |k_y - i_y|) \cdot \text{sign}(k_x - i_x + 1/2), \end{aligned}$$

аналогично

$$\iint_{\Delta S_k} \frac{\partial}{\partial y_p} G(p, q) dx_q dy_q = \beta^y (|k_x - i_x|, |k_y - i_y|) \cdot \text{sign}(k_y - i_y + 1/2).$$

В результате получаем общую матрицу системы, состоящую из блоков, таких, что на каждой из диагоналей, параллельных главной диагонали данного блока, располагаются одинаковые элементы. Такие матрицы называются блочно-теплицевыми. Для их обращения применяется метод Гаусса.

3. ОПИСАНИЕ ОСНОВНЫХ ПАРАМЕТРОВ ПРОГРАММЫ

При расчетах рассеянных электромагнитных полей в приближении тонких оболочек предполагается, что толщина оболочки $\tau \ll \lambda_b$, $\tau \ll \lambda_L$ (λ_b , λ_L — длина волны во вмещающих породах и в материале среды соответственно). Для выполнения практических расчетов можно приближенно принимать, что

$$\tau \leq \lambda_b/5, \text{ где } \lambda_b = 2\pi/[\omega\mu_0\sigma_b/2]^{0.5}.$$

Шаг разбиения оболочки по тангенциальным координатам (x , y) можно принимать равным

$$H \simeq \lambda_b/10 \text{ или } H \simeq \lambda_b/7.$$

Размеры оболочки L_x , L_y , которые следует установить для моделирования бесконечно протяженного пласта, выбирают исходя из требования:

$$L_x, L_y \simeq 2\lambda_b \text{ при } \sigma_b \simeq 10^{-2} \text{ См/м.}$$

При расчете компонент рассеянного магнитного поля внутри пласта необходимо учитывать, что нормальная компонента рассеянного поля H_z^s непрерывна при переходе через поверхность пласта. Поле H_z^s внутри пласта при $-\tau/2 \leq z_p \leq \tau/2$ вычисляется из соотношения

$$H_z^s = \frac{1}{\mu_0} \left(\partial A_y / \partial x - \partial A_x / \partial y \right); \quad \vec{A}(p) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iint_S \vec{J}(q) \frac{\exp(ik_b r_{pq})}{r_{pq}} dS_q,$$

$$\text{где } r_{pq} = ((x_p - x_q)^2 + (y_p - y_q)^2 + z_p^2)^{1/2}, \quad -\tau/2 \leq z_p \leq \tau/2.$$

В отличие от вертикальной компоненты, тангенциальные компоненты магнитного поля H_x , H_y испытывают скачок при переходе с верхней поверхности пласта на нижнюю. Компоненты поля H_x , H_y рассчитывают, применяя векторный потенциал для объемного токового слоя в пласте при $-\tau/2 \leq z_q \leq \tau/2$:

$$\vec{A}(p) = \frac{\mu_0}{4\pi\tau} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} dz_q \iint_S \vec{J}(q) \frac{\exp(ik_b r_{pq})}{r_{pq}} dS_q,$$

$$H_x^s = \frac{1}{\mu_0} \left(\partial A_z / \partial y - \partial A_y / \partial z \right); \quad H_y^s = \frac{1}{\mu_0} \left(\partial A_x / \partial z - \partial A_z / \partial x \right).$$

4. РЕЗУЛЬТАТЫ ТЕСТОВЫХ РАСЧЕТОВ

Тестовые расчеты служат для сравнения результатов, полученных на основе метода тонких оболочек (МТДО), с результатами классической теории Зоммерфельда возбуждения многослойных сред. Рассмотрены следующие варианты тестовых расчетов (Л. А. Егоров):

А. Слой толщиной $\tau = 3$ м (рис. 1.2), находящийся во вмещающих породах ($\epsilon_{r,b} = 10$; $\sigma_b = 0,025$ См/м), возбуждается вертикальным магнитным диполем с частотой $f = 100$ кГц. Скважина с передатчиком проходит перпендикулярно через центр пласта с размерами $L_x = L_y = 90$ м.

Электрические параметры пласта $\epsilon_{r,L} = 10$; $\sigma_L = 10^{-3}$ См/м. Начало координат O находится в точке $\tau/2$ внутри пласта. Приемник проходит также перпендикулярно пласту и находится на расстоянии $y = 10$ м от скважины с передатчиком. Выдача полного поля $H_z^{\text{tot}} = H_z^i + H_z^s$ производилась в точках скважины с приемником при $z_{\text{rec}} = 2,5; 1,5; 0,5; -0,5; -1,5$ м. Ортогональная к поверхности пласта координата z отсчитывается от середины пласта. Значения поля приводятся в децибелах (табл. 1.1)

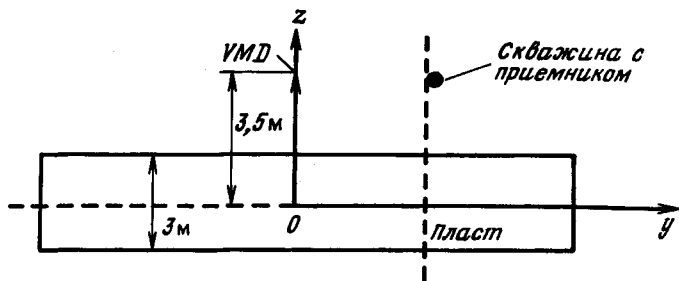


Рис. 1.2. Возбуждение пласта вертикальным магнитным диполем VMD

Таблица 1.1

Координата приемника $z_{\text{rec}}, \text{ м}$	Полное поле H_z^{tot} , дБ	
	Теория Зоммерфельда	МТДО
2,5	-80,16	-80,23
1,5	-81,08	-81,23
0,5	-82,57	-82,89
-0,5	-84,56	-84,97
-1,5	-86,98	-87,37

Б. Геометрия задачи та же, что в тесте А.

Параметры задачи следующие: $\varepsilon_{r,b}=10$; $\sigma_b=0,025 \text{ См/м}$; $\varepsilon_{r,L}=10$; $\sigma_L=1 \text{ См/м}$; $x_{\text{sour}}=y_{\text{sour}}=x_{\text{rec}}=y_{\text{rec}}=0$; $z_{\text{sour}}=3,5 \text{ м}$ (табл. 1.2).

Таблица 1.2

Координата приемника $z_{\text{rec}}, \text{ м}$	Полное поле H_z^{tot} , дБ	
	Теория Зоммерфельда	МТДО
2,5	-16,018	-16,02
2,0	-26,77	-26,78
1,5	-34,75	-34,76
1,0	-41,36	-41,37
0,5	-47,12	-47,13
0,0	-52,29	-52,3
-0,5	-56,92	-56,93
-1,0	-60,94	-60,95
-1,5	-64,41	-64,42
-2,0	-67,55	-67,56

В. Передатчик внутри пласта.

Параметры задачи следующие: $\varepsilon_{r,b}=10$, $\sigma_b=0,025 \text{ См/м}$; $\varepsilon_{r,L}=10$, $\sigma_L=1 \text{ См/м}$; $x_{\text{sour}}=y_{\text{sour}}=x_{\text{rec}}=y_{\text{rec}}=z_{\text{sour}}=0$ (табл. 1.3).

Таблица 1.3

Координата приемника $z_{\text{рес}}, \text{ м}$	Полное поле $H_z^{\text{tot}}, \text{ дБ}$	
	Теория Зоммерфельда	МТДО
1,0	-16,5	-16,0
2,0	-35,75	-34,28
5,0	-63,53	-59,75
20,0	-113,2	-111,44

Из таблиц видно, что результаты расчетов по двум различным методам вполне согласуются друг с другом.

ИТЕРАЦИОННАЯ СХЕМА ПРОЦЕССА РАСЧЕТА ЭЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ДВУХ ПЛАСТОВ

Запишем в операторном виде систему уравнений (4)—(6) для нахождения токов поляризации в одиночном пласте:

$$PJ = F^i,$$

где $J = (J_x, J_y, J_z)$, $F = (F_x, F_y, F_z)$.

Аналогичную систему для двух взаимодействующих пластов A и B запишем в следующем виде:

$$P_A J_A = F^i + F(J_B), \quad P_B J_B = F^i + F(J_A),$$

где $F(J_{A,B}) = i\omega \vec{A}(J_{A,B}) + i/(\omega \epsilon_b \mu_0) \text{grad div } \vec{A}(J_{A,B})$;

$$\vec{A}(J_{A,B}) = \mu_0/4\pi \iint_{(S)} \vec{J}_{A,B}(q) G(p, q) dS_q.$$

Итерационная схема принята в виде

$$\vartheta J_A^{n+1} + P_A J_A^{n+1} = F^i + F(J_B^n) + \vartheta J_A^n,$$

$$\vartheta J_B^{n+1} + P_B J_B^{n+1} = F^i + F(J_A^n) + \vartheta J_B^n,$$

где n — номер итерации. Итерационный процесс прекращается, когда

$$|J_{A,B}^{n+1} - J_{A,B}^n| < \varepsilon.$$

Параметр ϑ вводят для ускорения сходимости итерационного процесса и принимают равным $\vartheta = kD$, где k — некоторое положительное число.

Задание исходной информации в файле входных данных INI.dat

Пример файла INI.dat для расчета распределения рассеянной компоненты E_z вдоль скважины при синхронном перемещении источника HMD_x и приемника с базой 2 м.

frqncy	= 50 000	... частота поля f , Гц
er_b	= 6	... диэлектрическая проницаемость вмещающих пород $\epsilon_{r,b}$
sigma_b	= 0.02	... проводимость вмещающих пород σ_b , См/м
er_anom	= 4	... диэлектрическая проницаемость пласта $\epsilon_{r,L}$
sigma_anom	= 0.01	... проводимость пласта σ_L , См/м
thickn	= 5	... толщина пласта τ , м
H	= 1.25	... шаг разностной сетки, м
nxa	= 25	... число интервалов разностной сетки по оси x
nya	= 8	... число интервалов разностной сетки по оси y
xsour	= 0	... x — координата источника
ysour	= 0	... y — координата источника
zsour	= 0	... z — координата источника
IS(0V,1H)	= 1	... индекс направления оси диполя, 0:VMD _z ; 1:HMD _x
IEH(0E,1H)	= 0	... индекс типа выдачи рассеянного поля, 0: $\vec{E}$; 1: $\vec{H}$
XRCVR	= 0	... x — координата приемника
YRCVR	= 0	... y — координата приемника
ZRCVR	= 2	... z — координата приемника
DZRCVR	= 0	... шаг размещения точек приемника по оси z
NASCT	= 1	... число точек положения приемника
FI1(rot. Z)	= 0	... угол Эйлера вращения вокруг оси z , φ
TETA(X)	= 0	... угол Эйлера вращения вокруг оси x , θ
FI2(Z)	= 0	... угол Эйлера вращения по оси z , φ_1
X1_0	= -15.625	... x — координата O_1 пласта
Y1_0	= 10	... y — координата O_1 пласта
Z1_0	= 0	... z — координата O_1 пласта

1.3. ДВУХМЕРНЫЕ МОДЕЛИ

1. ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧИ

Электромагнитный метод тонких диэлектрических оболочек (МТДО) является эффективным способом моделирования газонефтяных залежей в осадочной толще. Преимущество метода заключается в возможности определения неизвестных компонент токов поляризации не во всем пространстве распространения электромагнитного поля, но только на элементах поверхностей или кривых, представляющих искомые аномалии во вмещающих породах. Составляя произвольные композиции из поверхностей (или кривых), можно моделировать электромагнитные отклики сложных литологических объектов.

Классические методы электродинамики (например, метод Зоммерфельда интегрального представления решений волновых уравнений) дают определение электромагнитных полей для плоскостойких, бесконечно протяженных сред, но их нельзя использовать для изучения нерегулярно залегающих пластов, отдельных включений или локализованных аномалий.

Метод МТДО имеет важное практическое применение в геофизических исследованиях при радиоволновом просвечивании (геотомографии) с целью выявления и оценки электрических параметров нефтегазоносных пластов в осадочной толще [25], а также осуществления контроля при разработке нефтегазоносных месторождений [26].

Решение прямой задачи нахождения волнового поля в геологически неоднородном пространстве сводится к нахождению поля только на поверхности пласта (в трехмерных задачах) или контуре поперечного сечения пласта (в двухмерных задачах), что резко повышает эффективность вычислительных алгоритмов.

Применение двухмерной теории МТДО для решения задач восстановления электрического строения неоднородных сред является практически единственной возможностью, поскольку применение трехмерной теории МТДО в алгоритмах решения обратных задач дифракции требует значительно больших ресурсов ЭВМ.

В настоящем разделе путем сопоставления с результатами решения трехмерных задач дифракции исследуются границы применения и выбор классов моделей сред, для которых справедлива двумерная теория МТДО.

Рассмотрим двумерную задачу теории дифракции на диэлектрическом слое толщиной τ , расположенном вблизи плоской границы раздела двух полубесконечных сред (например, глины — карбонаты, воздух — горные породы). Пусть ось y направлена вертикально вверх, перпендикулярно к границе раздела двух сред. Предполагая, что вдоль оси z геометрия системы и характер возбуждения электромагнитного поля не меняется, получим задачу дифракции в плоскости (xy) .

Рассмотрим случай E -поляризации, когда электрический вектор падающей волны направлен параллельно оси z [24].

Единственной компонентой тока поляризации, отличной от нуля, является компонента J_z , причем $\operatorname{div} J \equiv 0$.

Из краевых условий (1.2), (1.3) получаем интегральное уравнение для поля $E_z^{\text{int}}(p)$ на диэлектрической оболочке, помещенной в двухслойную среду:

$$E_z^{\text{int}}(p) = \frac{ik_b^2 \tau}{4} (\epsilon_L / \epsilon_b - 1) \int_L E_z^{\text{int}}(q) G(p, q) dl_q + E_z^i(p), \quad (1.7)$$

где L — контур оболочки; $G(p, q)$ — функция Грина двухслойного пространства, имеющая вид [36]:

$$G(p, q) = H_0^{(1)}(k_b r_{pq}) - 2 \int_0^\infty \frac{J_2(\xi)}{\xi} H_0^{(1)}(k_b \tilde{r}_{pq}) d\xi; \quad (1.8)$$

$$E_z^i(p) = -\frac{I_z^e \omega \mu_0}{4} G(p, q_s);$$

$H_0^{(1)}$ — функция Ханкеля первого рода;

$$\tilde{r}_{pq} = \{ (x_p - x_q)^2 + [|y_p| + |y_q| + i\xi / (k_b \sqrt{\tilde{\epsilon} - 1})]^2 \}^{1/2};$$

$$\tilde{\epsilon} = \epsilon_a / \epsilon_b;$$

a, b — индексы верхнего и нижнего полупространств; I_z^e — амплитуда линейного синфазного тока, проходящего через точку $q_s(x_s, y_s)$ в нижней среде b . После того как найдена

функция $E_z^{\text{int}}(q)$ в точках q слоя (пласта), рассеянное электромагнитное поле в любой точке p нижнего полупространства находится с помощью соотношений

$$E_z(p) = -\frac{\omega\mu_0}{4} \int_L J_z(q) \{H_0^{(1)}(k_b r_{pq}) + \\ + \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\gamma_b - \gamma_a}{(\gamma_b + \gamma_a) \gamma_b} \cos k_x (x_p - x_q) \exp [i\gamma_b (|y_p| + |y_q|)] dk_x \} dl_q,$$

$$H_x(p) = \frac{i}{4} \int_L J_z(q) \left\{ -k_b \frac{y_p - y_q}{r_{pq}} H_1^{(1)}(k_b r_{pq}) - \right. \\ \left. - \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\gamma_b - \gamma_a}{\gamma_b + \gamma_a} \cos k_x (x_p - x_q) \exp [i\gamma_b (|y_p| + |y_q|)] dk_x \right\} dl_q,$$

$$H_y(p) = -\frac{i}{4} \int_L J_z(q) \left\{ -k_b \frac{x_p - x_q}{r_{pq}} H_1^{(1)}(k_b r_{pq}) - \right. \\ \left. - \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \left[\frac{\gamma_b - \gamma_a}{\gamma_b + \gamma_a} \right] \frac{k_x}{\gamma_b} \sin k_x (x_p - x_q) \exp [i\gamma_b (|y_p| + |y_q|)] dk_x \right\} dl_q,$$

где

$$J_z(q) = -\frac{i\tau k_0}{\eta_0} \bar{\epsilon}_b \left[\frac{\epsilon_L}{\epsilon_b} - 1 \right] E_z^{\text{int}}(q), \quad \gamma_{a,b} = \sqrt{k_{a,b}^2 - k_x^2}.$$

Функция Грина $G(p, q)$ в ядре и правой части уравнения (1.7), а также в выражениях для рассеянных полей $E_z(p)$, $H_{x,y}(p)$ состоит из суммы функции Грина однородного пространства и интегралов типа Зоммерфельда для неоднородного пространства, состоящего из двух различных полубесконечных слоев. Эффективные методы вычисления последних интегралов играют исключительно важную роль при расчете матричных элементов интегрального уравнения (1.7).

На основе изложенного в разделах 1.2 и 1.3 метода тонких диэлектрических оболочек разработаны алгоритмы и програм-

мы для расчетов на ЭВМ электромагнитных полей в средах с потерями, а также сравнения результатов двухмерной и трехмерной теории дифракции.

2. АНАЛИЗ ЧИСЛЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Расчеты проводились для геофизических исследований нефтяных и газовых скважин с целью определения геологического строения околоскважинного пространства. Для частот электромагнитного поля $f=10^4-10^5$ Гц радиус исследования составляет около $30 \div 50$ м при удельном электрическом сопротивлении вмещающих пород $\rho_b \approx 100$ Ом·м.

В настоящем разделе исследуется характер изменения электромагнитного поля вдоль скважины с источником в виде магнитного диполя на оси скважины при пересечении приемником в этой же скважине поверхности пласта. Исследуется также влияние кромки пласта, когда скважина, проходя вблизи пласта, не пересекает его. Метод тонких диэлектрических оболочек идеально подходит для моделирования нефтегазовых залежей, поскольку толщина реальных нефтегазоносных пластов $\tau \approx 10$ м значительно меньше длины электромагнитной волны во вмещающих породах λ_b , которая при частотах $f \approx 10^4-10^5$ Гц составляет около $300-100$ м.

Приведенные в настоящем разделе данные представляют собой распределения компонент магнитного поля в виде значений $20 \lg |H_{x,y,z}|$ вдоль скважины, в которой находится источник электромагнитного поля — вертикальный или горизонтальный магнитный диполь. В качестве приемного устройства, находящегося в той же скважине, применяются катушки, ориентированные вдоль осей x, y, z . Приемное устройство может перемещаться либо независимо от источника, либо приемник и источник совмещены и перемещаются синхронно.

На рис. 1.3 сопоставлены компоненты рассеянного магнитного поля H_y, H_z , вычисленные на основе двухмерной (2D) и трехмерной (3D) теорий дифракции. В модели 3D-теории принят пласт, лежащий в плоскости xy . Ось скважины проходит перпендикулярно к плоскости пласта $z=0$ через точку $x=150$ м, $y=-30$ м, не пересекая пласт. Источником поля является вертикальный магнитный диполь (VMD) с магнитным моментом $I_z^m L = 120\pi$, находящийся в скважине на уровне

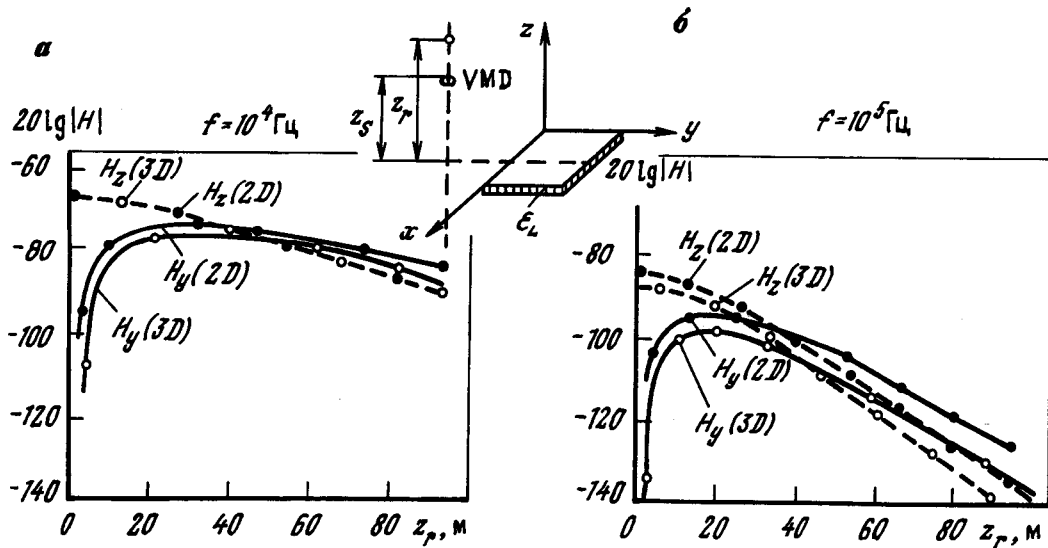


Рис. 1.3. Сравнение результатов расчета распределения поля $\vec{H}$ вдоль скважины по двухмерной (2D) и по трехмерной (3D) теориям дифракции.

Фрагмент с геометрией системы для прямоугольного пласта с размерами сторон $L_x=300$ м, $L_y=150$ м и толщиной 3 м; z_r — координаты приемника, z_s — координаты источника

$z_s = 30$ м над пластом (рис. 1.3, а) и $z_s = 0$ (рис. 1.3, б). Относительная диэлектрическая проницаемость пласта $\epsilon_{r,L} = 20$, удельное сопротивление $\rho_L = 10$ Ом·м. Электрические параметры однородной окружающей среды следующие: $\epsilon_{r,b} = 10$, $\rho_b = 100$ Ом·м.

В модели 2D-теории принят бесконечно протяженный пласт вдоль оси x , ширина пласта $L_y = 150$ м, источником поля является синфазная нить электрического тока $I_x^e = 1$ А, проходящая через точку $y_s = -30$ м, $z_s = 30$ м (рис. 1.3, а); $y_s = -30$ м, $z_s = 0$ (рис. 1.3, б).

На рис. 1.3, а частота поля $f = 10^4$ Гц, длина волны во вмещающей среде $\lambda_b = 316$ м. В этом случае пласт оказывается непосредственно в ближней зоне источника, где характер поля незначительно зависит от вида источника, в результате чего амплитуды рассеянного поля H_y , H_z для 2D- и 3D-теорий удовлетворительно совпадают.

Несколько больше различие для этих же компонент при частоте $f = 10^5$ Гц (рис. 1.3, б), поскольку длина волны во вмещающих породах $\lambda_b \approx 100$ м и, следовательно, влияние геометрических параметров возрастает.

На рис. 1.4 показано влияние поперечных компонент тока J_z на рассеянное поле $\vec{H}$ для двух различных по диэлектрической проницаемости прямоугольных пластов с размерами сторон $L_x = 45$ м, $L_y = 45$ м и толщиной $\tau = 3$ м. Ось скважины проходит перпендикулярно плоскости пласта через его центр — точку с координатами $x = 22,5$ м, $y = 22,5$ м, $z = 0$. Источником поля является горизонтальный магнитный диполь (HMD) с осью, параллельной оси Ox , с частотой $f = 10^5$ Гц и магнитным моментом $I_x^m L = 120\pi$, находящийся в скважине на расстоянии $z_s = 30$ м над пластом. Пласт на рис. 1.4, а имеет диэлектрическую проницаемость $\bar{\epsilon}_b = 20 + i \cdot 1,8 \cdot 10^6$ ($\rho_L = 1$ Ом·м), пласт на рис. 1.4, б имеет $\bar{\epsilon}_L = 1 + i \cdot 0$ (вакуум). Диэлектрическая проницаемость однородной вмещающей среды $\bar{\epsilon}_b = 10 + i \cdot 1,8 \cdot 10^4$ ($\rho_b = 100$ Ом·м). Как и следовало ожидать, амплитуда рассеянного поля для пласта с большой проводимостью значительно увеличивается и мало меняется от вклада вертикальных компонент токов поляризации J_z , при этом амплитуда компоненты H_x (с J_z и без J_z) значительно превышает амплитуды H_y и H_z .

В рамках двумерной теории дифракции исследовалось влияние границы раздела двух сред на магнитное поле $\vec{H}$,

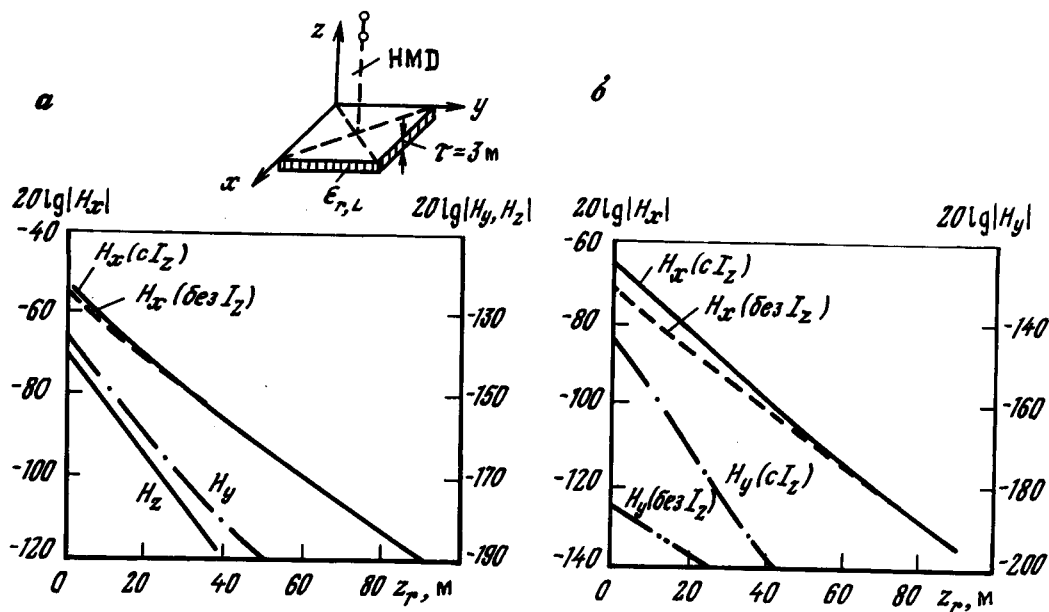


Рис. 1.4. Влияние поперечной компоненты тока поляризации I_z в тонком слое на распределение рассеянного поля $\vec{H}$ вдоль скважины.

Источник НМД с частотой $f = 10^5$ Гц в точке $z_s = 30$ м над центром пласта: а — $\epsilon_{r,L} = 20 + i \cdot 1,8 \cdot 10^5$; б — $\epsilon_{r,L} = 1 + i \cdot 0$

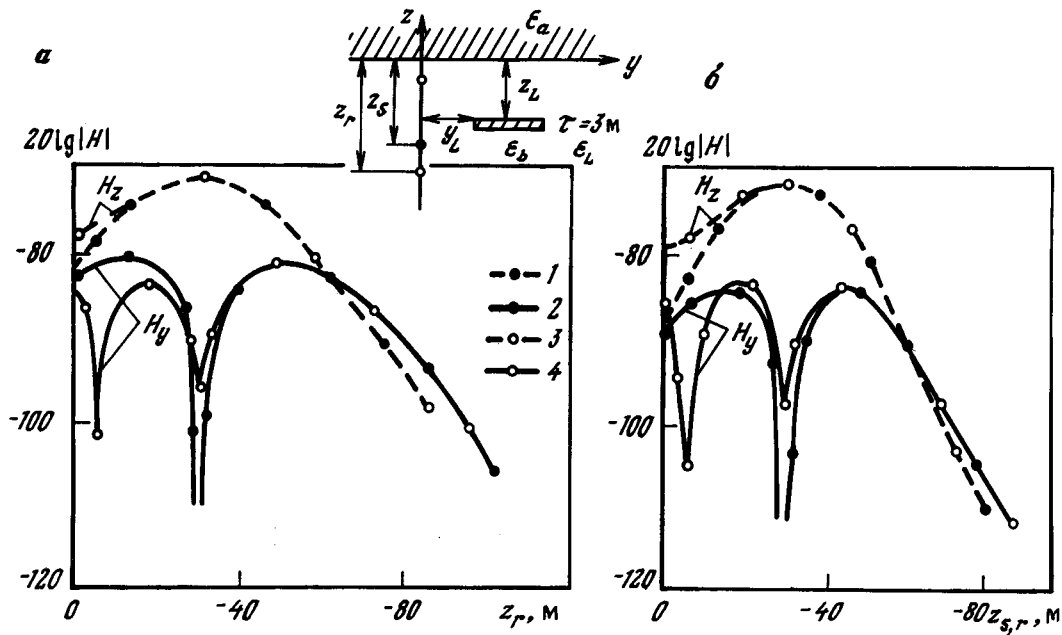


Рис. 1.5. Влияние границы раздела двух сред на распределение рассеянного поля $\tilde{H}$ с частотой $f=10^5$ Гц вдоль оси скважины. 2D-теория дифракции:

a —положение источника фиксировано в точке $z_s = -30$ м; b —источник и приемник совмещены и перемещаются вдоль скважины синхронно; 1, 2—однородная окружающая среда; 3, 4—двухслойная окружающая среда

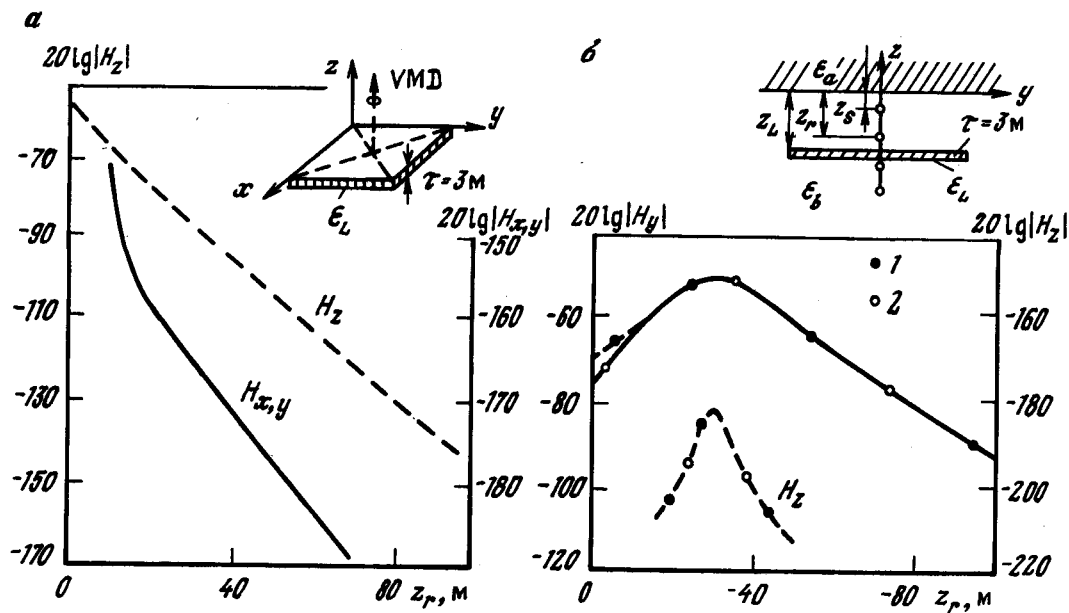


Рис. 1.6. Сравнение распределения поля $\vec{H}$ с частотой $f=10^5$ Гц вдоль скважины по 2D- и 3D-теориям:
 а—3D-теория, источник VMD с $I_z^m \cdot L=120\pi$ в точке $z_s=30$ м над центром пласта; б—2D-теория, источник $I_z^e=1$ в точке $z_s=-10$ м; 1—однородная окружающая среда; 2—двухслойная окружающая среда

рассеянное тонким пластом $\tau = 3$ м. Верхнее и нижнее полупространства имеют диэлектрические проницаемости соответственно $\bar{\epsilon}_a = 1 + i \cdot 0$, $\bar{\epsilon}_b = 10 + i \cdot 1,8 \cdot 10^3$ ($\rho_b = 100$ Ом·м), частота поля $f = 10^5$ Гц. Пласт смещен от скважины на $y_L = 30$ м, находится на расстоянии $z_L = -30$ м от границы раздела двух сред и имеет диэлектрическую проницаемость $\bar{\epsilon}_L = 20 + i \cdot 1,8 \cdot 10^5$, ($\rho_L = 1$ Ом·м).

На рис. 1.5, *a* положение источника было фиксировано в среде *b* на расстоянии $z_s = -30$ м; на рис. 1.5, *b* приемник и источник поля совмещены и перемещаются синхронно. Интересно отметить, что влияние границы раздела двух сред имеет локальный характер, значительно изменяя горизонтальную компоненту магнитного поля вблизи границы раздела.

На рис. 1.6 показан характер изменения компонент рассеянного магнитного поля, рассчитанных на основе двухмерной и трехмерной теорий дифракции для случая, когда скважина, вдоль которой перемещаются источник и приемник, пересекает пласт. Источником поля для 3D-теории является вертикальный магнитный диполь с $f = 10^5$ Гц, зафиксированный на высоте $z_s = 30$ м над центром квадратного пласта со стороной $L = 45$ м, $\bar{\epsilon}_L = 20 + i \cdot 1,8 \cdot 10^5$, $\bar{\epsilon}_b = 10 + i \cdot 1,8 \cdot 10^3$. Источником поля для 2D-теории является нить электрического тока, параллельная оси *OX* на расстоянии $z_s = -10$ м от границы раздела двух сред $\bar{\epsilon}_a = 1 + i \cdot 0$, $\bar{\epsilon}_b = 10 + i \cdot 1,8 \cdot 10^3$, пласт находится на расстоянии $z_L = -30$ м от границы раздела. При этом необходимо учитывать, что тангенциальные компоненты магнитного поля $\vec{H}_t$ непрерывны вплоть до *S* сверху (снизу) относительно направления нормали $\vec{n} = \vec{z}$ к слою *S*. При переходе через поверхность *S* компоненты $\vec{H}_t$ испытывают скачок, величина которого равна тангенциальной компоненте поверхностного тока

$$\vec{z} \times (\vec{H}_{s+} - \vec{H}_{s-}) = \vec{J}.$$

Как видно из сопоставления одноименных компонент магнитного поля, характер полей принципиально различный для 2D- и 3D-теории, где для 3D-модели применен вертикальный магнитный диполь. Очевидно, что в этой ситуации при решении задач отбивки границ пластов и оценки их электрических параметров в качестве источника в 3D-модели должен применяться горизонтальный магнитный диполь.

С другой стороны, для ситуации, аналогичной ситуации на рис. 1.3, когда необходимо исследовать разрывы и выклинивания пластов, а также расположение водонефтяного (газового) контакта при интенсивной разработке пласта, применение 2D-модели — аналога модели с источником типа вертикального магнитного диполя — весьма эффективно. При этом возможны два метода радиопросвечивания: односкважинный (радиолокационный), когда источник и приемник расположены в одной и той же скважине, и межскважинный, когда источник и приемник электромагнитного поля расположены и перемещаются в двух разных скважинах.

1.4. АНАЛИЗ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ НА ГРАНИЦАХ РАЗДЕЛА ДВУХ СРЕД И ВНУТРИ ПЛАСТОВ

В методе радиопросвечивания выявление пластов, отбивка границ пластов, пересекаемых скважиной, и определение электрических параметров (ϵ_r , σ , См/м) пластов производятся на основе анализа особенностей поведения электромагнитных полей на границах раздела сред. Метод тонких диэлектрических оболочек (МТДО) позволяет исследовать электромагнитные поля как вне электрически тонких пластов ($|k_L d| \ll 1$, где k_L — волновое число в области пласта), так и внутри таких пластов. При этом необходимо иметь в виду, что эффективность применения метода МТДО обусловлена редукцией исходной трехмерной задачи дифракции к некоторой последовательности (в зависимости от числа рассматриваемых пластов) двумерных задач, решение которых требует значительно меньшего объема вычислений и осуществляется с применением современных ПЭВМ.

Исследование возможности применения метода тонких диэлектрических оболочек при изучении характера поведения электромагнитных полей вблизи границ раздела сред, пересекаемых скважиной, и внутри тонких пластов выполнено на основе анализа и сравнения с результатами классической теории Зоммерфельда.

При этом используются два различных способа возбуждения полей — с помощью вертикального магнитного диполя

(VMD), ось которого ортогональна границам раздела сред, и горизонтального магнитного диполя (HMD), ось которого параллельна границам раздела.

А. ВОЗБУЖДЕНИЕ ТРЕХСЛОЙНОЙ СРЕДЫ ВЕРТИКАЛЬНЫМ МАГНИТНЫМ ДИПОЛЕМ (метод интегральных представлений Зоммерфельда)

Рассмотрим трехслойную среду, возбуждаемую вертикальным магнитным диполем, помещенным в верхнем полубесконечном слое. Ось z направим вертикально вверх ортогонально напластованию; в плоскости xy среды бесконечно протяженные, пласт толщиной d имеет произвольную комплексную диэлектрическую проницаемость $\varepsilon_2 = \varepsilon_L$. Границы разделов сред представляют собой плоскости, параллельные плоскости xy . Нижняя граница пласта Γ_1 задана уравнением $z = -d$, на верхней границе пласта Γ_2 находится начало декартовой системы координат. Магнитный диполь расположен в точке $z = h$ ($h \geq 0$), причем ось магнитного диполя совпадает с осью $\bar{z}$.

Таким образом, в выбранной системе координат среде 1 будет соответствовать область $z < -d$; среде 2 (пласт) — область $-d < z < 0$; среде 3 — область $z > 0$.

Электрические параметры среды с номером α : $\varepsilon_\alpha, \sigma_\alpha, \mu_\alpha$:

$$\varepsilon_\alpha = \varepsilon_0 \varepsilon_{\alpha,1} + i \sigma_\alpha / \omega; \alpha = 1, 2, 3,$$

где ε_0 — диэлектрическая проницаемость вакуума; $\omega = 2\pi f$ (f — частота поля); σ_α — проводимость среды α ; $\mu_\alpha = \mu_0$ — магнитная проницаемость вакуума.

Электромагнитное поле в каждой из рассматриваемых сред удовлетворяет уравнениям Максвелла:

$$\operatorname{rot} \vec{E}(P) = i\omega\mu \vec{H}(P) - \vec{I}^M, \quad (1.9)$$

$$\operatorname{rot} \vec{H}(P) = i\omega\varepsilon \vec{E}, \quad (1.10)$$

где $\varepsilon = \varepsilon_\alpha$; $\vec{I}^M = (0, 0, I^M L)$ — источник (вертикальный магнитный диполь с моментом магнитного тока, равным $I^M L$), находящийся в точке $(0, 0, h)$.

Решение уравнений (1.9), (1.10) имеет вид:

$$\vec{E}(P) = -\operatorname{rot} \vec{A}(P), \quad (1.11)$$

$$\vec{H}(P) = i\omega\varepsilon \vec{A}(P) + \frac{i}{\omega\mu_0} \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{A}(P), \quad (1.12)$$

где $\vec{A}(P)$ — векторный потенциал поля.

Принимая во внимание основные соотношения теории дифракции, находим, что $\vec{A}(P) = (0, 0, A_z(P))$, причем A_z удовлетворяет уравнению

$$\Delta A_z + k^2 A_z = -I^M L \delta(x) \delta(y) \delta(z-h), \quad k = k_\alpha.$$

Интегральное представление Зоммерфельда для решения $A_z^{(\alpha)}$ последнего уравнения в каждой среде $\alpha = 1, 2, 3$ имеет вид:

$$A_z^{(1)}(z, r) = \frac{I^M L}{4\pi} \int_0^\infty g_0(\lambda) e^{\gamma_1 z} J_0(\lambda r) \lambda \frac{d\lambda}{\gamma_1},$$

$$A_z^{(2)}(z, r) = \frac{I^M L}{4\pi} \int_0^\infty [g_1(\lambda) e^{-\gamma_2 z} + g_2(\lambda) e^{\gamma_2 z}] J_0(\lambda r) \lambda \frac{d\lambda}{\gamma_2},$$

$$A_z^{(3)}(z, r) = \frac{I^M L}{4\pi} \int_0^\infty [e^{-\gamma_3 |z-h|} + g_3(\lambda) e^{-\gamma_3 z}] J_0(\lambda r) \lambda \frac{d\lambda}{\gamma_3},$$

$$\gamma_\alpha = (\lambda^2 - k_\alpha^2)^{1/2}, \quad \text{Re } \gamma_\alpha > 0, \quad k_\alpha^2 = \omega^2 \epsilon_\alpha \mu_0, \quad r^2 = x^2 + y^2.$$

Функции g_0, g_1, g_2, g_3 находятся из условий непрерывности тангенциальных компонент E_x, E_y и H_x, H_y на границах $\Gamma_{1,2}$ разделов двух сред:

из условий $E_x^+ = E_{x|\Gamma_{1,2}}^-, E_y^+ = E_{y|\Gamma_{1,2}}^-$ следует непрерывность z -компоненты вектора $\vec{A}$ на этих границах:

$$A_z^+ = A_{z|\Gamma_{1,2}}^-,$$

а из условий $H_x^+ = H_{x|\Gamma_{1,2}}^-, H_y^+ = H_{y|\Gamma_{1,2}}^-$ следует непрерывность нормальной производной z -компоненты вектора $\vec{A}$ на этих границах:

$$\frac{\partial}{\partial z} A_z^+ = \frac{\partial}{\partial z} A_{z|\Gamma_{1,2}}^- = A_{z|\Gamma_{1,2}}^-.$$

В итоге это приводит к следующим алгебраическим соотношениям между неизвестными функциями $g_j, j=0, 1, 2, 3$:

$$g_1 + g_2 = [g_3 + \exp(-\gamma_3 h)] \gamma_2 / \gamma_3,$$

$$g_1 - g_2 - g_3 = -\exp(-\gamma_3 h),$$

$$\exp(\gamma_2 d) g_1 + \exp(-\gamma_2 d) g_2 = g_0 \exp(-\gamma_1 d) \gamma_2 / \gamma_1,$$

$$\exp(\gamma_2 d) g_1 - \exp(-\gamma_2 d) g_2 + \exp(-\gamma_1 d) g_0 = 0.$$

Введем новые обозначения:

$$\alpha = \gamma_2 / \gamma_3, \quad \beta = \gamma_2 / \gamma_1,$$

$$\delta = \frac{\beta - 1}{\beta + 1} \exp(-2\gamma_2 d), \quad \Delta = (\alpha - 1)\delta - \alpha - 1.$$

В этих обозначениях

$$g_0 = -\exp(-\gamma_3 h + \gamma_1 d - \gamma_2 d) \cdot \frac{4\alpha}{(1 + \beta)\Delta},$$

$$g_1 = -\exp(-\gamma_3 h) \cdot 2\delta\alpha / \Delta, \quad g_2 = -\exp(-\gamma_3 h) \cdot 2\alpha / \Delta,$$

$$g_3 = \exp(-\gamma_3 h) \cdot [-\delta(\alpha + 1) + \alpha - 1] / \Delta.$$

Из (1.12) следует:

$$H_x = \theta \frac{\partial^2 A_z}{\partial x \partial z}, \quad H_y = \theta \frac{\partial^2 A_z}{\partial y \partial z}, \quad H_z = \xi A_z + \theta \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2},$$

$$\text{где } \theta = i \frac{I^M L}{4\pi\omega\mu_0}; \quad \xi = i\omega\epsilon_\alpha \frac{I^M L}{4\pi}.$$

$$\text{Очевидно, } H_x = \frac{x}{r} H_r, \quad H_y = \frac{y}{r} H_r, \quad \text{где } H_r = \theta \frac{\partial^2 A_z}{\partial r \partial z}.$$

Заметим, что при $x = y = 0$ $H_x = H_y = 0$.

Для H_z имеем выражения:

$$H_z^{(1)}(z, r) = - \int_0^\infty \left(\theta \gamma_1 + \frac{\epsilon_1}{\gamma_1} \right) \exp(-\gamma_3 h + \gamma_1 d + \gamma_1 z - \gamma_2 d) \times \\ \times J_0(\lambda r) \frac{4\alpha\lambda d\lambda}{(1 + \beta)\Delta},$$

$$H_z^{(2)}(z, r) = - \int_0^\infty \left(\theta \gamma_2 + \frac{\epsilon_2}{\gamma_2} \right) \left\{ \frac{\beta - 1}{\beta + 1} \exp[-2\gamma_2(d + z)] + 1 \right\} \times \\ \times \exp(-\gamma_3 h + \gamma_2 z) J_0(\lambda r) \frac{2\alpha\lambda d\lambda}{(1 + \beta)\Delta},$$

$$H_z^{(3)}(z, r) = \theta \frac{\partial^2 G}{\partial z^2} + \xi_3 G + \int_0^\infty \left(\theta \gamma_3 + \frac{\epsilon_3}{\gamma_3} \right) \times \\ \times \exp[-\gamma_3(h + z)] J_0(\lambda r) \frac{[\alpha - 1 - \delta(\alpha + 1)]\lambda d\lambda}{(1 + \beta)\Delta}.$$

При выводе последней формулы было использовано соотношение Зоммерфельда

$$G = \exp(ik_3 R) / R \equiv \int_0^{\infty} e^{-\gamma_3 |z-h|} J_0(\lambda r) \lambda \frac{d\lambda}{\gamma_3},$$

где $R = [i^2 + (z-h)^2]^{1/2}$.

Используя соотношение $dJ_0(q)/dq = -J_1(q)$, аналогично получим,

$$H_r^{(1)}(z, r) = -\theta \int_0^{\infty} g_0(\lambda) \exp(\gamma_1 z) J_1(\lambda r) \lambda^2 d\lambda,$$

$$H_r^{(2)}(z, r) = \theta \int_0^{\infty} [g_1(\lambda) \exp(-\gamma_2 z) - g_2(\lambda) \exp(\gamma_2 z)] J_1(\lambda r) \lambda^2 d\lambda,$$

$$H_r^{(3)}(z, r) = \theta \frac{\partial^2 G}{\partial r \partial z} + \theta \int_0^{\infty} g_3(\lambda) \exp(-\gamma_3 z) J_1(\lambda r) \lambda^2 d\lambda,$$

$$\frac{\partial^2 G}{\partial r \partial z} = (z-h) \cdot r \cdot \exp(ik_3 R) \cdot (3 - 3ik_3 R - k^2 R^2) / R^5,$$

$$\frac{\partial^2 G}{\partial z^2} = \exp(ik_3 R) \cdot [2 - 2ik_3 R - k_3^2 R^2 + \\ + r^2 (k_3^2 + 3ik_3 / R - 3 / R^2)] / R^3.$$

Вычисление интегралов производится по специальной процедуре: бесконечная область интегрирования ($0 < \lambda < \infty$) заменяется достаточно большим отрезком ($0 < \lambda < A$), который разбивается на отдельные интервалы интегрирования длиной $\Delta\lambda$, а для вычисления интегралов по каждому отдельному интервалу использовались стандартные квадратурные формулы Гаусса с пятью узлами. Параметр $\Delta\lambda$ выбирали таким образом, чтобы отдельные интервалы интегрирования не превосходили полупериода осцилляций функций Бесселя. Отрезок интегрирования A выбирался таким образом, чтобы подынтегральная функция $f(\lambda)$ становилась по модулю достаточно меньше заданного числа ε : $|f(A)| < \varepsilon$.

На рис. 1.7 показано изменение амплитуды (a) и фазы (ϕ) вертикальной компоненты магнитного поля H_z^{tot} при пересече-

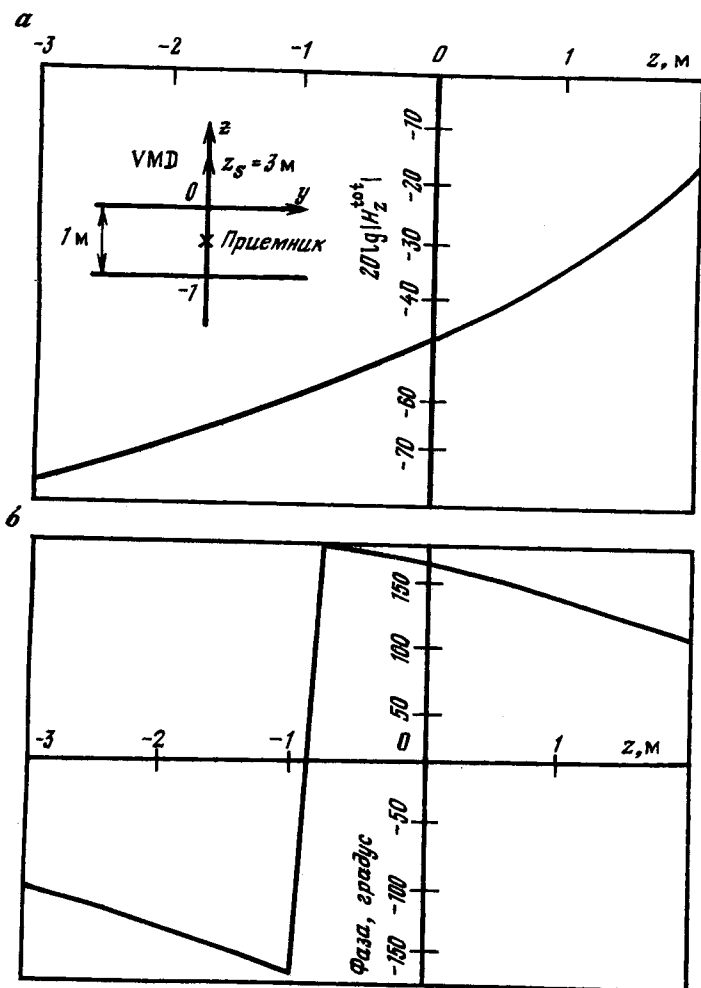


Рис. 1.7. Распределение амплитуды (а) и фазы (б) z -компоненты полного магнитного поля H_z^{tot} (z) при пересечении приемником пласта толщиной 1 м (см. фрагмент с геометрией на рис. 1.7, а)

нии приемником пласта толщиной 1 м и возбуждении VMD с частотой $f = 5 \cdot 10^6$ Гц (источник зафиксирован в точке $z_s = 3$ м над пластом). Ось z совпадает с осью скважины и диполя и направлена перпендикулярно к поверхности пласта с $\epsilon_r, L = 4$, $\sigma_L = 10^{-3}$ См/м; приемник перемещается в этой же скважине

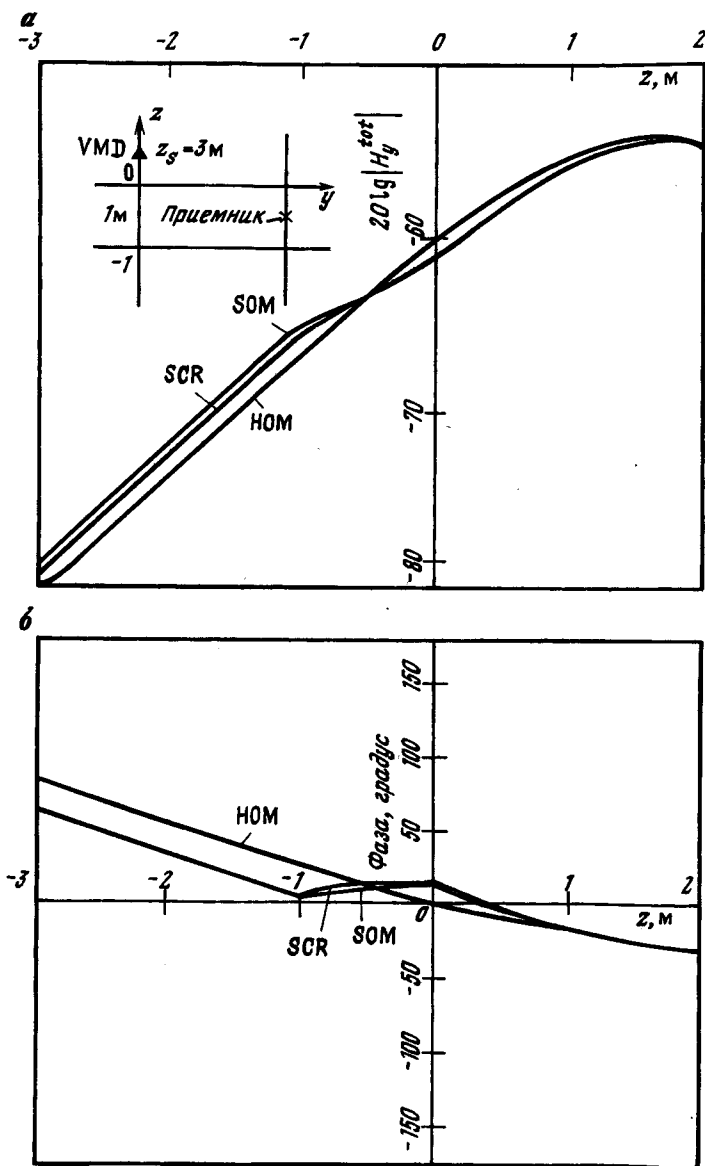


Рис. 1.8. Распределение амплитуды (а) и фазы (б) тангенциальной к пласту компоненты магнитного поля $H_y^{\text{tot}}(z)$ при пересечении приемником пласта в скважине, отстоящей на расстояние $y_r = 3\text{ м}$ от скважины с источником VMD. SCR — метод тонких оболочек, SOM — метод Зоммерфельда, HOM — однородная среда (пласт отсутствует)

(см. фрагмент с геометрией системы на рис. 1.7, а). Электрические параметры однородной окружающей среды следующие: $\varepsilon_r, b=6$, $\sigma_b=2 \cdot 10^{-2}$ См/м. Расчеты амплитуды и фазы компоненты $H_z^{\text{tot}}(z)$ в точках на оси z , выполненные по 3D-программе (SCREEN) метода тонких диэлектрических оболочек и теории Зоммерфельда, совпадают с графической точностью. Как и следовало ожидать, вертикальная компонента магнитного поля H_z^{tot} непрерывно изменяется при пересечении пласта. Совершенно иначе ведет себя горизонтальная компонента H_y^{tot} , когда приемник пересекает пласт в другой скважине.

На рис. 1.8 показаны изменения амплитуды (а) и фазы (б) горизонтальной (тангенциальной к границам пласта) компоненты H_y^{tot} при пересечении приемником пласта в скважине, отстоящей на 3 м по оси y (см. фрагмент с геометрией системы на рис. 1.8, а). Частота электромагнитного поля, а также параметры пласта и окружающей среды аналогичны параметрам на рис. 1.7. Для сравнения здесь приведены результаты расчетов H_y^{tot} по программе SCREEN и по методу Зоммерфельда (кривая SOM), а также кривая НОМ, соответствующая однородной среде, когда пласт отсутствует. Видно, что амплитуда и фаза тангенциальной к пласту компоненты магнитного поля при переходе через пласт испытывают изменение, четко локализованное в пределах границ пласта.

На рис. 1.9—1.11 представлен характер изменения тангенциальной компоненты H_y^{tot} при пересечении приемником пласта с более высокой электропроводностью $\sigma_L=0,1$ См/м для частоты $f=10^4$ Гц. Во всех трех случаях приемник был зафиксирован на высоте 10 м над верхней границей пласта с электрическими параметрами $\varepsilon_L=20$, $\sigma_L=0,1$ См/м; толщина пласта равна 5 м. Электрические параметры вмещающей среды: $\varepsilon_b=7,2$; $\sigma_b=10^{-2}$ См/м. Приемник находится в соседней скважине (см. фрагмент с геометрией системы на рис. 1.8, а) на расстоянии от оси z $y_r=10, 50, 75$ м соответственно для рис. 1.9; 1.10; 1.11.

Из анализа приведенных амплитудно-фазовых характеристик тангенциальной компоненты H_y^{tot} следует, что для решения задачи выделения пластов и определения их электрических параметров необходимо применять разнесенную систему: источник электромагнитного поля VMD и горизонтальные приемные катушки должны находиться в соседних скважинах, удаленных друг от друга на расстояние около 75 м. При таком

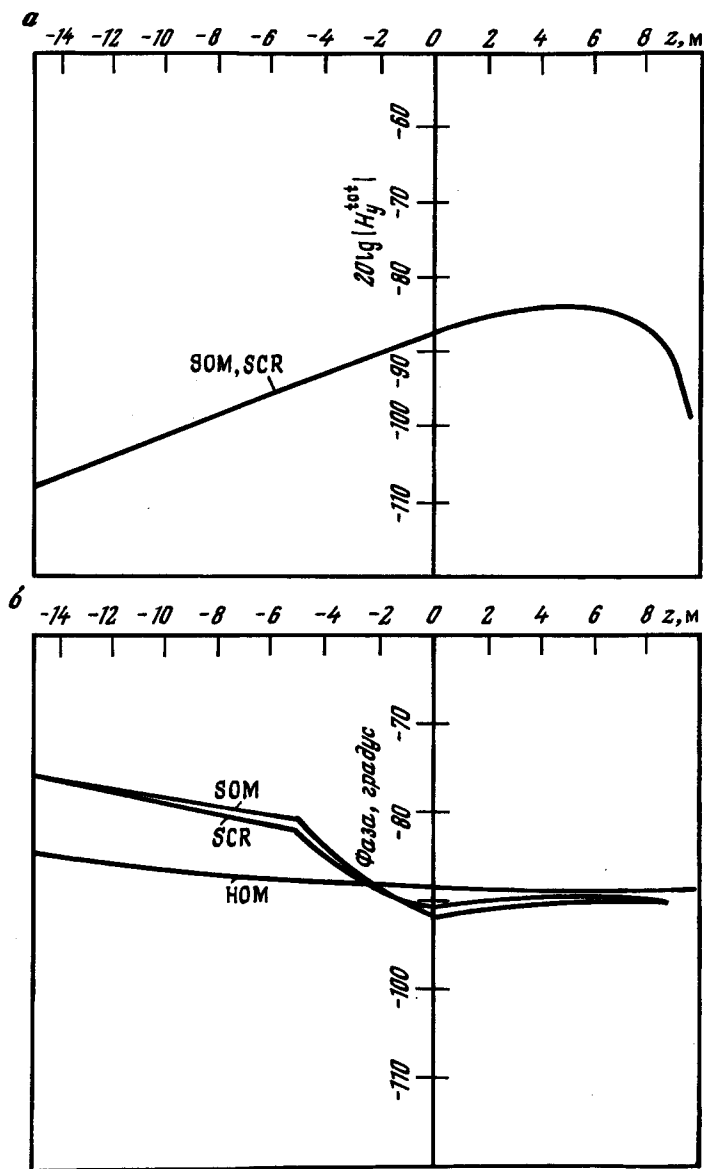


Рис. 1.9. Распределение амплитуды (а) и фазы (б) компоненты магнитного поля $H_y^{\text{tot}}(z)$ при пересечении пласта толщиной 5 м приемником в скважине, отстоящей на расстояние $y_r = 10$ м от скважины с источником VMD

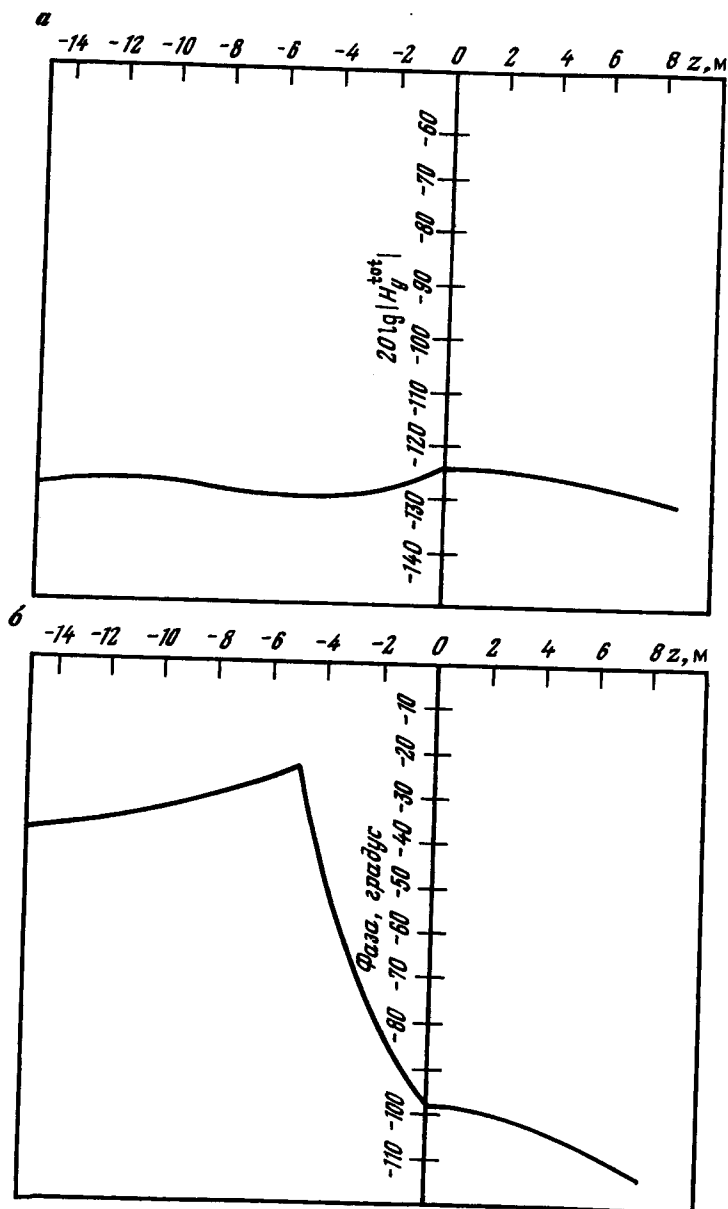


Рис. 1.10. Распределение амплитуды (а) и фазы (б) компоненты магнитного поля $H_y^{\text{tot}}(z)$ при пересечении пласта приемником в скважине, отстоящей на расстояние $y_r = 50$ м от скважины с источником VMD

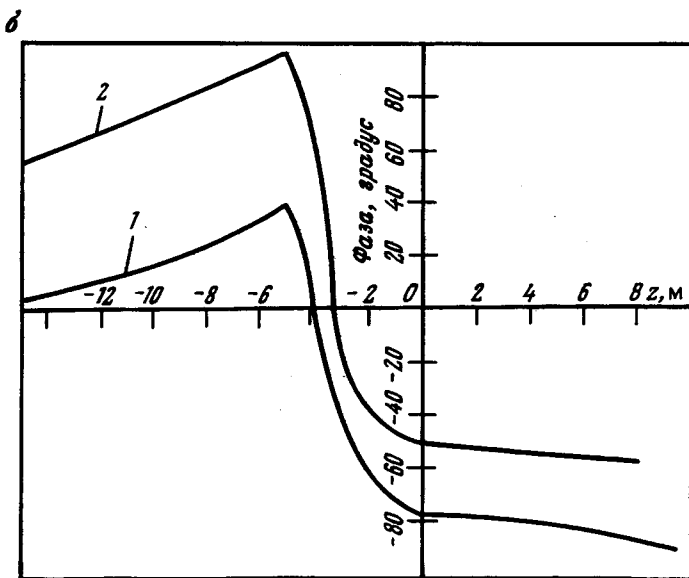
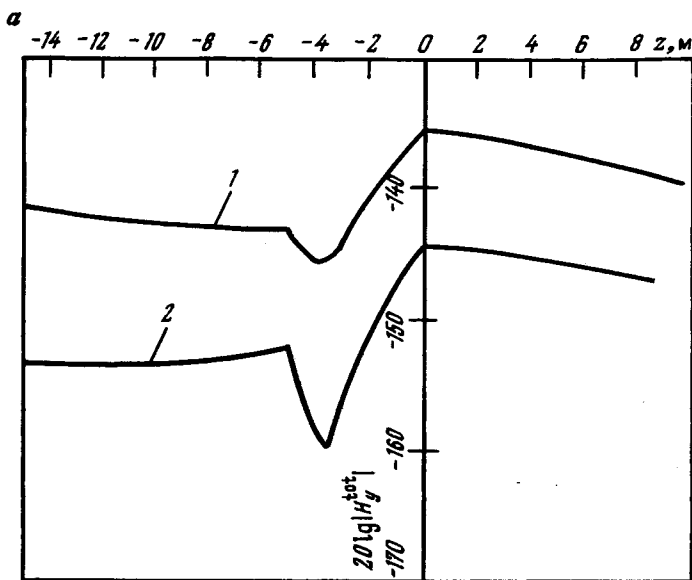


Рис. 1.11. Распределение амплитуды (а) и фазы (б) компоненты магнитного поля $H_y^{\text{tot}}(z)$ при пересечении пласта приемником в скважине, отстоящей на расстояние: $y_r = 75$ м (кривая 1), $y_r = 100$ м (кривая 2) от скважины с источником VMD

разнесении амплитуда и фаза в приемной катушке резко изменяются в пределах пласта благодаря тому, что в компоненте полного магнитного поля H_y^{tot} доминирует составляющая, рассеянная пластом, в то время как прямое поле от источника играет меньшую роль.

Б. ВОЗБУЖДЕНИЕ ТРЕХСЛОЙНОЙ СРЕДЫ ГОРИЗОНТАЛЬНЫМ МАГНИТНЫМ ДИПОЛЕМ (МЕТОД ИНТЕГРАЛЬНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ЗОММЕРФЕЛЬДА)

Задача о возбуждении плоскопараллельной многослойной среды горизонтальным магнитным диполем (HMD), ось которого параллельна границам раздела, сложнее, чем задача для VMD. Для выполнения всех условий непрерывности тангенциальных составляющих электрического и магнитного полей на границах раздела сред в случае возбуждения HMD необходимо определить векторный потенциал данной задачи, имеющий две компоненты: $\vec{A} = (A_x, A_z)$.

Ниже рассматриваются алгоритмы расчета горизонтальной компоненты магнитного поля H_x^{tot} , полученные на основании интегральных представлений Зоммерфельда, и приведено сопоставление с результатами метода тонких оболочек.

Как и в предыдущем случае (использование источника VMD), рассмотрим трехслойную среду с бесконечными, плоскопараллельными границами раздела. Вводится декартова система координат с плоскостью xy , лежащей на одной из плоскостей раздела двух сред, с осью z , направленной перпендикулярно плоскостям раздела. На оси z в точке с координатой $z_s = h > 0$ находится источник электромагнитного поля, представляющий собой горизонтальный магнитный диполь с магнитным моментом тока равным $I_x^m L = I^M L$, ось диполя направлена вдоль координаты x .

Границами разделов сред являются плоскости Γ_1 и Γ_2 , определяемые уравнениями — граница Γ_1 : $z = -d < 0$, граница Γ_2 : $z = 0$. Таким образом, в выбранной системе координат среде 1 будет соответствовать область $z < -d$; среде 2 — область $-d < z < 0$; среде 3 — область $z > 0$.

Электромагнитное поле в рассматриваемой среде удовлетворяет уравнениям Максвелла (1.9)—(1.10) и соотношениям (1.11)—(1.12). Как было отмечено выше, при наличии источни-

ка НМД для выполнения краевых условий на границах раздела сред векторный потенциал $\vec{A}(P)$ должен иметь две компоненты: $\vec{A} = (A_x, A_z)$, причем A_x, A_z удовлетворяют уравнениям:

$$\Delta A_x + k^2 A_x = -I^M L \delta(z-h) \cdot \delta(r),$$

$$\Delta A_z + k^2 A_z = 0,$$

где $r = (x^2 + y^2)^{1/2}$, $k = k_\alpha = (\omega^2 \epsilon_\alpha \mu_0)^{1/2}$, $\text{Im } k_\alpha > 0$.

В результате, x - и z - компоненты векторного потенциала $A_x^{(\alpha)}$, $A_z^{(\alpha)}$ в среде α можно представить в следующем виде:

$$A_x^{(1)}(P) = \frac{I^M L}{4\pi} \int_0^\infty g_5(\lambda) e^{-\gamma_1(h-z)} J_0(\lambda r) \lambda \frac{d\lambda}{\gamma_1},$$

$$A_x^{(2)}(P) = \frac{I^M L}{4\pi} \int_0^\infty [g_3(\lambda) e^{-\gamma_2(h-z)} + g_4(\lambda) e^{\gamma_2(h-z)}] J_0(\lambda r) \lambda \frac{d\lambda}{\gamma_2},$$

$$A_x^{(3)}(P) = \frac{I^M L}{4\pi} \int_0^\infty [e^{-\gamma_3|z-h|} + g_2(\lambda) e^{\gamma_3(h-z)}] J_0(\lambda r) \lambda \frac{d\lambda}{\gamma_3},$$

$$A_z^{(1)}(P) = \frac{I^M L}{4\pi} \frac{x}{r} \int_0^\infty f_5(\lambda) e^{-\gamma_1(h-z)} J_1(\lambda r) \lambda^2 \frac{d\lambda}{\gamma_1},$$

$$A_z^{(2)}(P) = \frac{I^M L}{4\pi} \frac{x}{r} \int_0^\infty [f_3(\lambda) e^{-\gamma_2(h-z)} + f_4(\lambda) e^{\gamma_2(h-z)}] J_1(\lambda r) \lambda^2 \frac{d\lambda}{\gamma_2},$$

$$A_z^{(3)}(P) = \frac{I^M L}{4\pi} \frac{x}{r} \int_0^\infty f_2(\lambda) e^{\gamma_3 z} J_1(\lambda r) \lambda^2 \frac{d\lambda}{\gamma_3},$$

$\gamma_\alpha = (\lambda^2 - k_\alpha^2)^{1/2}$, $\text{Re } \gamma_\alpha > 0$, $\alpha = 1, 2, 3$; J_0, J_1 — функции Бесселя.

Восемь неизвестных функций $g_j, f_j, j = 2 \div 5$ находятся из условий непрерывности тангенциальных компонент E_x, E_y и H_x, H_y на границах $\Gamma_{1,2}$ разделов двух сред:

из условий $E_x^+ = E_x^-|_{\Gamma_{1,2}}$ следует $\partial A_z^+ / \partial y = \partial A_z^- / \partial y|_{\Gamma_{1,2}}$, откуда вытекает непрерывность z -компоненты вектора $\vec{A}$ на этих границах:

$$A_z^+ = A_z^-|_{\Gamma_{1,2}};$$

из условий $E_y^+ = E_y^-|_{\Gamma_{1,2}}$ следует $\partial A_x^+ / \partial z = \partial A_x^- / \partial z|_{\Gamma_{1,2}}$; а из условий $H_x^+ = H_x^-|_{\Gamma_{1,2}}$ получаем

$$k_-^2 A_x^- + \frac{\partial}{\partial x} \operatorname{div} \vec{A}^- = k_+^2 A_x^+ + \frac{\partial}{\partial x} \operatorname{div} \vec{A}^+|_{\Gamma_{1,2}},$$

откуда вытекает соотношение

$$k_-^2 A_x^- = k_+^2 A_x^+|_{\Gamma_{1,2}},$$

а из условий $H_y^+ = H_y^-|_{\Gamma_{1,2}}$ следует:

$$\operatorname{div} \vec{A}^- = \operatorname{div} \vec{A}^+|_{\Gamma_{1,2}} \text{ или}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} A_x^- + \frac{\partial}{\partial z} A_z^- = \frac{\partial}{\partial x} A_x^+ + \frac{\partial}{\partial z} A_z^+|_{\Gamma_{1,2}}.$$

В результате имеем восемь условий:

$$A_z^{(1)} = A_z^{(2)}|_{z=-d}, \quad A_z^{(2)} = A_z^{(3)}|_{z=0}$$

$$\frac{\partial}{\partial z} A_x^{(1)} = \frac{\partial}{\partial z} A_x^{(2)}|_{z=-d}, \quad \frac{\partial}{\partial z} A_x^{(2)} = \frac{\partial}{\partial z} A_x^{(3)}|_{z=0},$$

$$k_1^2 A_x^{(1)} = k_2^2 A_x^{(2)}|_{z=-d}, \quad k_2^2 A_x^{(2)} = k_3^2 A_x^{(3)}|_{z=0},$$

$$\frac{\partial}{\partial x} (A_x^{(1)} - A_x^{(2)}) = \frac{\partial}{\partial z} (A_z^{(2)} - A_z^{(1)})|_{z=-d},$$

$$\frac{\partial}{\partial x} (A_x^{(2)} - A_x^{(3)}) = \frac{\partial}{\partial z} (A_z^{(3)} - A_z^{(2)})|_{z=0},$$

из которых получаем следующие алгебраические соотношения между неизвестными функциями $g_j, f_j; j=2, 3, 4, 5$:

$$-B_{31} + g_2 A_{31} = -g_3 B_{21} + g_4 A_{21},$$

$$B_{31} + g_2 A_{31} = s_1 \alpha_1 (g_3 B_{21} + g_4 A_{21}),$$

$$-g_3 B_{22} + g_4 A_{22} = -g_5 B_{12},$$

$$g_3 B_{22} + g_4 A_{22} = s_2 \alpha_2 g_5 B_{12},$$

$$f_2 A_{31} = \alpha_1 (f_3 B_{21} + f_4 A_{21}),$$

$$f_3 B_{22} + f_4 A_{22} = \alpha_2 f_5 B_{12},$$

$$\gamma_3^{-1} (B_{31} + g_2 A_{31}) - \gamma_2^{-1} (g_3 B_{21} + g_4 A_{21}) = -f_3 B_{21} + f_4 A_{21} - f_2 A_{31},$$

$$\gamma_2^{-1} (g_3 B_{22} + g_4 A_{22}) - \gamma_1^{-1} g_5 B_{12} = -f_5 B_{12} + f_3 B_{22} - f_4 A_{22},$$

где

$$B_{31} = \exp(-\gamma_3 h), \quad B_{22} = \exp[-\gamma_2(d+h)],$$

$$B_{21} = \exp(-\gamma_2 h), \quad B_{12} = \exp[-\gamma_1(d+h)], \quad A_{\alpha\beta} = 1/B_{\alpha\beta},$$

$$\alpha_1 = \gamma_3/\gamma_2, \quad s_1 = k_2^2/k_3^2, \quad \alpha_2 = \gamma_2/\gamma_1, \quad s_2 = k_1^2/k_2^2.$$

Последовательным исключением находим сначала все функции g_j (независимо от функций f_j), а затем функции f_j :

$$g_2 = \tilde{g}_2 \exp(-2\gamma_3 h),$$

$$\tilde{g}_2 = [(s_1 \alpha_1 - 1)(s_2 \alpha_2 + 1) + \theta(s_1 \alpha_1 + 1)(s_2 \alpha_2 - 1)]/\Delta,$$

$$\Delta = (s_1 \alpha_1 + 1)(s_2 \alpha_2 + 1) + \theta(s_1 \alpha_1 - 1)(s_2 \alpha_2 - 1), \quad \theta = \exp(-2\gamma_2 d),$$

$$g_3 = \tilde{g}_3 \exp(-\gamma_3 h + \gamma_2 h), \quad \tilde{g}_3 = 2(s_2 \alpha_2 + 1)/\Delta,$$

$$g_4 = \tilde{g}_4 \exp[-\gamma_3 h + \gamma_2 h - 2\gamma_2(d+h)], \quad \tilde{g}_4 = 2(s_2 \alpha_2 - 1)/\Delta,$$

$$g_5 = \tilde{g}_5 \exp[-\gamma_3 h - \gamma_2 d + \gamma_1(d+h)], \quad \tilde{g}_5 = 4/\Delta,$$

$$f_2 = \tilde{f}_2 \exp(-2\gamma_3 h),$$

$$\tilde{f}_2 = \frac{2}{\Delta D} \alpha_1 \left\{ \frac{4\alpha_2(s_2-1)}{\gamma_1} \theta + \frac{s_1-1}{\gamma_2} Q[\alpha_2 + 1 + \theta(\alpha_2 - 1)] \right\},$$

$$D = -(1 + \alpha_1)(1 + \alpha_2) - \theta(1 - \alpha_1)(1 - \alpha_2),$$

$$Q = s_2 \alpha_2 + 1 + \theta(s_2 \alpha_2 - 1),$$

$$f_3 = \tilde{f}_3 \exp(-\gamma_3 h + \gamma_2 h),$$

$$\tilde{f}_3 = \frac{2}{\Delta D} \left\{ \frac{2\alpha_2(s_2-1)}{\gamma_1} (1 - \alpha_1) \theta + \frac{s_1-1}{\gamma_2} Q(\alpha_2 + 1) \right\},$$

$$f_4 = \tilde{f}_4 \exp[-\gamma_3 h + \gamma_2 h - 2\gamma_2(d+h)],$$

$$\tilde{f}_4 = \frac{2}{\Delta D} \left\{ \frac{2\alpha_2(s_2-1)}{\gamma_1} (1 + \alpha_1) + \frac{s_1-1}{\gamma_2} Q(\alpha_2 - 1) \right\},$$

$$f_5 = \tilde{f}_5 \exp[-\gamma_3 h - \gamma_2 d + \gamma_1(d+h)],$$

$$\tilde{f}_5 = \frac{4}{\Delta D} \left\{ \frac{s_2-1}{\gamma_1} [1 + \alpha_1 + \theta(1 - \alpha_1)] + \frac{s_1-1}{\gamma_2} Q \right\}.$$

Значения компонент магнитного поля выражаются, как следует из соотношения (1.12), через компоненты векторного потенциала:

$$H_x^{(\alpha)} = \xi_\alpha A_x^{(\alpha)} + \eta \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial}{\partial x} A_x^{(\alpha)} + \frac{\partial}{\partial z} A_z^{(\alpha)} \right],$$

$$H_y^{(\alpha)} = \eta \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial}{\partial x} A_x^{(\alpha)} + \frac{\partial}{\partial z} A_z^{(\alpha)} \right],$$

$$H_z^{(\alpha)} = \xi_\alpha A_z^{(\alpha)} + \eta \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial}{\partial x} A_x^{(\alpha)} + \frac{\partial}{\partial z} A_z^{(\alpha)} \right],$$

где $\eta = i \frac{1}{\omega \mu_0}$, $\xi_\alpha = i \omega \varepsilon_\alpha$, $\alpha = 1, 2, 3$.

Будем искать значения компонент магнитного поля в точках с координатой $x=0$. Очевидно,

$$H_{x|x=0}^{(\alpha)} = \xi_\alpha A_x^{(\alpha)} + \frac{\eta}{r} \frac{\partial}{\partial r} A_x^{(\alpha)} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta}{x} \frac{\partial}{\partial z} A_z^{(\alpha)},$$

$$H_{y|x=0}^{(\alpha)} = 0, \quad H_{z|x=0}^{(\alpha)} = 0.$$

Далее, используя соотношения

$$\partial J_0(\lambda r) / \partial r = -\lambda J_1(\lambda r), \quad \frac{\partial}{\partial x} = \frac{x}{r} \frac{\partial}{\partial r},$$

представим x -компоненту магнитного поля в следующем виде:

$$H_{x|x=0}^{(1)} = \frac{I^m L}{4\pi} \left[\xi_1 \int_0^\infty F_1^{(1)} J_0(\lambda r) \lambda d\lambda - \frac{\eta}{r} \int_0^\infty F_2^{(1)} J_1(\lambda r) \lambda^2 d\lambda \right],$$

$$H_{x|x=0}^{(2)} = \frac{I^m L}{4\pi} \left[\xi_2 \int_0^\infty F_1^{(2)} J_0(\lambda r) \lambda d\lambda - \frac{\eta}{r} \int_0^\infty F_2^{(2)} J_1(\lambda r) \lambda^2 d\lambda \right],$$

$$H_{x|x=0}^{(3)} = \frac{I^m L}{4\pi} \left[\xi_3 G_3 + \frac{\eta}{r} \frac{\partial}{\partial r} G_3 + \right. \\ \left. + \xi_3 \int_0^\infty F_1^{(3)} J_0(\lambda r) \lambda d\lambda - \frac{\eta}{r} \int_0^\infty F_2^{(3)} J_1(\lambda r) \lambda^2 d\lambda \right],$$

где

$$G_3 = \exp(ik_3 R_h) / R_h \equiv \int_0^\infty e^{-\gamma_3 |z-h|} J_0(\lambda r) \lambda \frac{d\lambda}{\gamma_3},$$

$$R_h = \sqrt{r^2 + (z-h)^2},$$

$$F_1^{(1)} = \frac{1}{\gamma_1} \tilde{g}_5 \exp [-\gamma_3 h - \gamma_2 d + \gamma_1 (d+z)],$$

$$F_2^{(1)} = F_1^{(1)} - \tilde{f}_5 \exp [-\gamma_3 h - \gamma_2 d + \gamma_1 (d+z)],$$

$$F_1^{(2)} = \frac{1}{\gamma_2} \{ \tilde{g}_3 + \tilde{g}_4 \exp [-2\gamma_2 (d+z)] \} \exp (-\gamma_3 h + \gamma_2 z),$$

$$F_2^{(2)} = F_1^{(2)} + \{ -\tilde{f}_3 + \tilde{f}_4 \exp [-2\gamma_2 (d+z)] \} \exp (-\gamma_3 h + \gamma_2 z),$$

$$F_1^{(3)} = \frac{1}{\gamma_3} \tilde{g}_2 \exp [-\gamma_3 (h+z)],$$

$$F_2^{(3)} = F_1^{(3)} + \tilde{f}_2 \exp [-\gamma_3 (h+z)].$$

Вычисление интегралов производится по схеме, описание которой приведено в предыдущем разделе (возбуждение многослойной среды с помощью VMD).

В отличие от предыдущего случая, при возбуждении многослойной среды горизонтальным магнитным диполем с осью, направленной параллельно координате x , максимальное значение магнитного поля, рассеянного пластом, будет для тангенциальной к пласту компоненты H_x в точках на перпендикуляре, проведенном из диполя к пласту (см. рис. 1.4). В точках пересечения этого перпендикуляра с пластом токи поляризации, возбуждаемые НМД, направлены тангенциально к пласту и максимальны по амплитуде, благодаря чему величина разрыва компоненты H_x при переходе через пласт вдоль указанного перпендикуляра достигает своего максимума. Отсюда следует, что зондирование с применением НМД целесообразнее проводить в односкважинном варианте.

На рис. 1.12 представлено изменение амплитуды (a) и фазы (b) горизонтальной компоненты магнитного поля H_x^{tot} при пересечении приемником пласта толщиной 5 м и возбуждении НМД, ось которого параллельна координате x , частота $f = 10^4$ Гц. Ось z совпадает с осью скважины, проходит через диполь и направлена перпендикулярно поверхности пласта с $\varepsilon_{r,L} = 20$, $\sigma_L = 1$ См/м, приемник перемещается в этой же скважине (см. фрагмент с геометрией системы на рис. 1.12, a). Источник НМД расположен на расстоянии $z_s = 150$ м над верхней границей пласта. Электрические параметры однородной окружающей среды следующие: $\varepsilon_{r,b} = 7,2$, $\sigma_b = 10^{-2}$ См/м. Результаты расчетов амплитуды и фазы компоненты $H_x^{\text{tot}}(z)$ в точках на оси z , выполненные по 3D-программе (SCREEN)

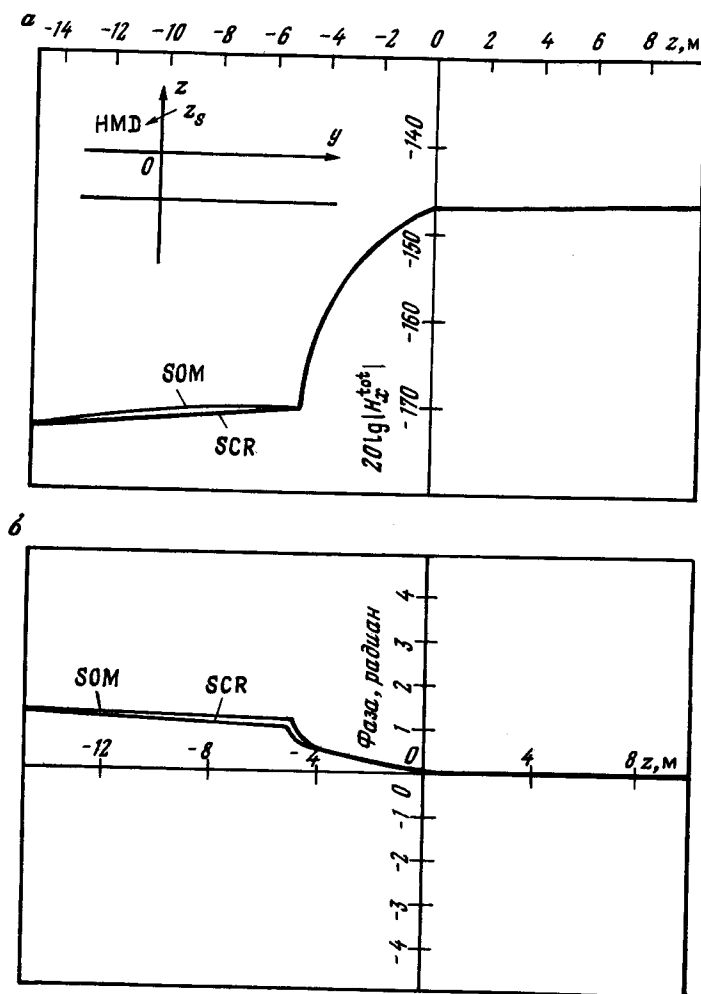


Рис. 1.12. Возбуждение пласта горизонтальным магнитным диполем НМД с осью, параллельной координате x . Распределение амплитуды (а) и фазы (б) компоненты магнитного поля $H_x^{\text{tot}}(z)$ при пересечении пласта толщиной 5 м приемником, находящимся в одной и той же скважине с источником

метода тонких диэлектрических оболочек (кривые с шифром SCR) и теории Зоммерфельда (кривые с шифром SOM), с достаточно высокой точностью совпадают. Интересно отметить, что при возбуждении НМД амплитуда компоненты магнит-

ного поля H_x^{tot} может значительно изменяться при пересечении пласта, тогда как фаза этой же компоненты при произвольно заданной проводимости пласта меняется слабым скачком.

На рис. 1.13 показан характер амплитуды и фазы компоненты H_x^{tot} , когда приемник пересекает пласт, находясь на небольшом расстоянии от источника НМД с $f=10^4$ Гц. Высота источника над пластом $z_s=10$ м (в отличие от $z_s=150$ м на рис. 1.12 и, кроме того, приемник проходит в соседней скважине параллельно оси z на расстоянии $y_r=10$ м); все остальные параметры модели аналогичны параметрам модели (рис. 1.12). Отсюда видно, что амплитуда поля H_x^{tot} , благодаря высокой проводимости пласта, значительно изменяется в пределах этого пласта, тогда как фаза изменяется незначительно. Кривые SCR (вычисленные по методу МТДО) и кривые SOM (метод Зоммерфельда) достаточно хорошо совпадают.

На рис. 1.14 приведены амплитудно-фазовые характеристики односкважинного метода зондирования для двух типов пространственного разнесения источника типа НМД с $f=10^4$ Гц и приемной катушки с горизонтально направленной осью. Электрические параметры пласта: $\epsilon_{r,L}=20$, $\sigma_L=0,1$ См/м; окружающей среды: $\epsilon_{r,b}=7,2$, $\sigma_b=0,01$ См/м. Видно, что при расстоянии источника над пластом $z_s=75$ м магнитное поле в приемной катушке при пересечении пласта изменяется (кривая 2), однако не столь значительно, как в предыдущем случае для проводимости пласта $\sigma_L=1$ См/м. При расстоянии $z_s=10$ м (кривая 1) влияние пласта практически отсутствует, поскольку здесь полностью доминирует падающее поле источника.

При распространении электромагнитных волн в осадочной толще земной коры в ряде случаев ее структура может представлять собой открытый слоистый волновод. Хорошо известно, что волноводные эффекты играют важную роль в сейсмической разведке при распространении упругих волн на большие расстояния. Аналогичные эффекты наблюдаются для электромагнитных волн. Детальная теория природных, а также искусственных слоистых волноводов, являющихся элементами конструкций технических устройств, предложена в работах [2, 21].

Приведем пример волноводного эффекта при возбуждении НМД в трехслойной среде, когда проводимость пласта ниже проводимости вмещающих пород. Этот случай может

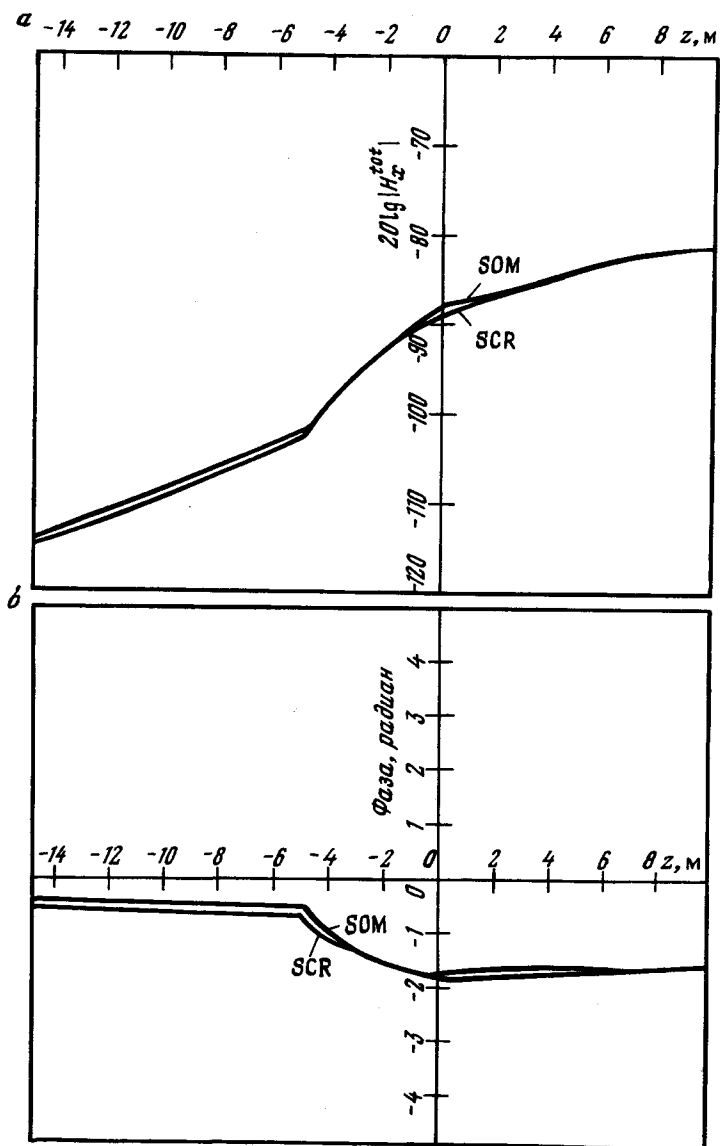


Рис. 1.13. Распределение амплитуды (а) и фазы (б) компоненты магнитного поля $H_x^{tot}(z)$ при пересечении пласта толщиной 5 м приемником в скважине, отстоящей на расстояние $y_r = 10$ м от скважины с источником НМД с $z_s = 10$ м. Электродинамические параметры пласта и окружающей среды аналогичны параметрам на рис. 1.12. SCR — метод тонких оболочек, SOM — метод Зоммерфельда

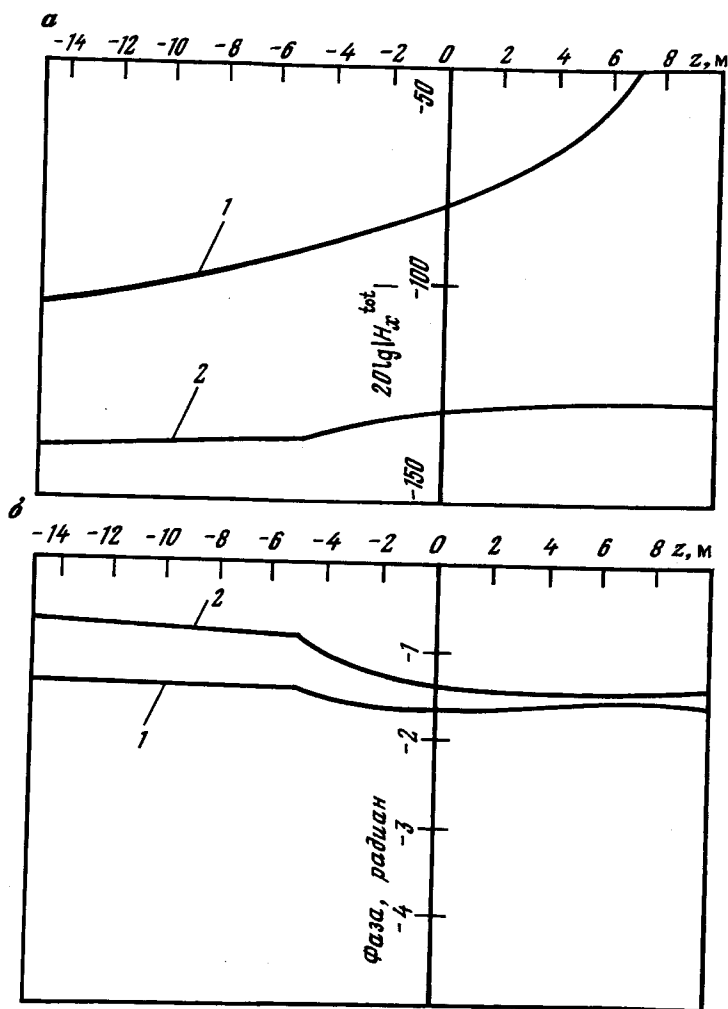


Рис. 1.14. Распределение амплитуды (a) и фазы ($б$) компоненты магнитного поля $H_x^{\text{tot}}(z)$ при пересечении пласта толщиной 5 м приемником, находящимся в одной и той же скважине с источником НМД в точке над пластом $z_s = 10$ м (кривая 1), $z_s = 75$ м (кривая 2), $f = 10^4$ Гц

играть существенную роль при глубинном дистанционном зондировании структуры осадочных пород. Ниже приведены результаты вычисления компоненты магнитного

поля H_x^{tot} по методу интегральных представлений Зоммерфельда.

Сначала на рис. 1.15, так же как для предыдущего варианта односкважинного метода зондирования, рассмотрим влияние вертикального пространственного разнесения приемника

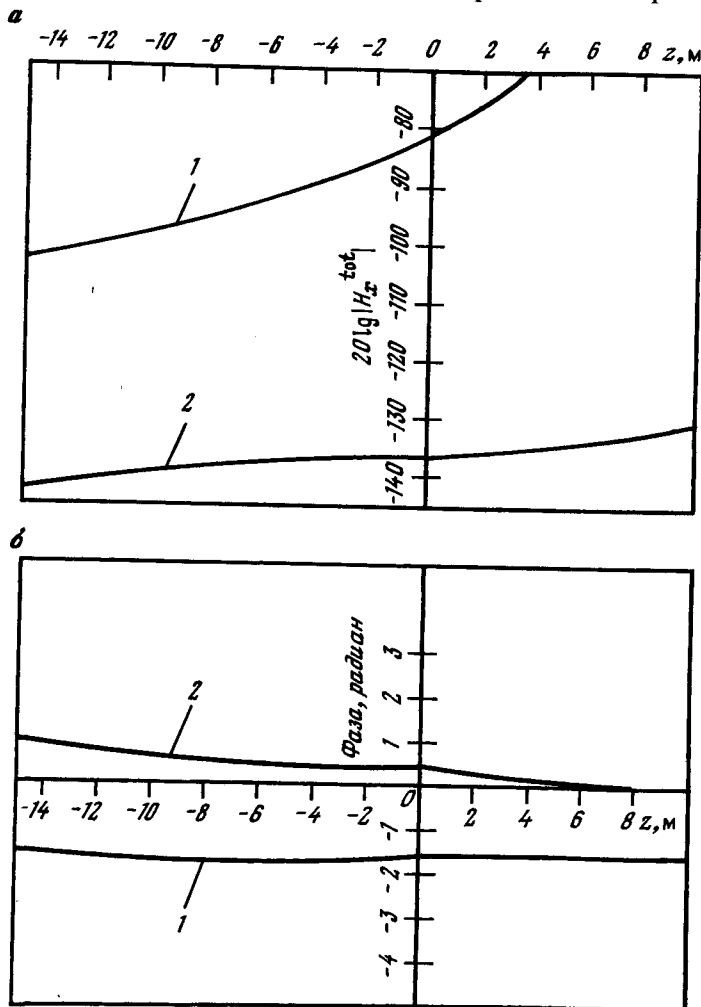


Рис. 1.15. Распределение амплитуды (а) и фазы (б) компоненты магнитного поля $H_x^{\text{tot}}(z)$ при пересечении пласта толщиной 5 м приемником, находящимся в одной и той же скважине с источником НМД в точке над пластом $z_s = 10$ м (кривая 1), $z_s = 75$ м (кривая 2 м), $f = 10^4$ Гц

и источника на характер изменения H_x^{tot} . Толщина пласта 5 м, $\epsilon_{r,L}=7,2$, $\sigma_L=0,01$ См/м; параметры окружающей среды: $\epsilon_{r,b}=20$, $\sigma_b=0,05$ См/м. Отсюда видно, что как для близкого расположения источника НМД (кривая 1), так и для более удаленного (кривая 2) влияние границ пласта на изменение тангенциальной компоненты магнитного поля при переходе через пласт практически отсутствует. Ясно, что это обусловлено малостью токов поляризации, возбуждаемых падающим полем в объеме пласта (сравните с рис. 1.12).

Возникновение волноводного эффекта рассмотрим для двух пластов толщиной $d=10$ м и 100 м, погруженных во вмещающие породы с $\epsilon_{r,b}=20$, $\sigma_b=0,05$ См/м; электрические параметры пластов, как и в предыдущем случае: $\epsilon_{r,L}=7,2$, $\sigma_L=0,01$ См/м. Источник НМД с $f=10^4$ Гц расположен на расстоянии $z_s=10$ м над верхней границей пласта.

Согласно теории [5], для волновода с идеально проводящими стенками и в предположении, что пространство внутри волновода имеет электромагнитные свойства пустоты, волна может распространяться в таком волноводе и переносить электромагнитную энергию, если ее частота превышает так называемую критическую частоту данной волны. Если вместо частоты пользоваться длиной волны, соответствующей данной частоте в свободном пространстве, то распространение возможно при условии, что длина волны короче критической длины волны. Для плоского волновода критическая длина волны $\lambda_0=2d$, где d —расстояние между стенками волновода (толщина пласта). При переходе к волноводу, заполненному веществом, нужно заменить волновое число k_0 для пустоты комплексным волновым числом $k_L=k_0\sqrt{\epsilon\mu}$ в веществе. На частотах $10^4 \div 10^6$ Гц для вещества с проводимостью $\sigma \approx 0,01$ См/м рабочая длина волны в веществе $\lambda_L=316 \div 31,6$ м, где $\lambda_L=2\pi/\sqrt{\omega\mu\sigma/2}$. При этом комплексное волновое число k_L в данной среде имеет равные по абсолютной величине действительную и мнимую части и, следовательно, волновод имеет значительные потери. Наличие потерь в волноводе делает скачкообразный переход от распространения к затуханию (при критической частоте данной рабочей волны) непрерывным, размытым.

На рис. 1.16,а показано распределение амплитуды компоненты поля $H_x^{\text{tot}}(y)$ вдоль пласта толщиной $d=10$ м параллельно координате y по лучам 2 и 3 (см. фрагмент

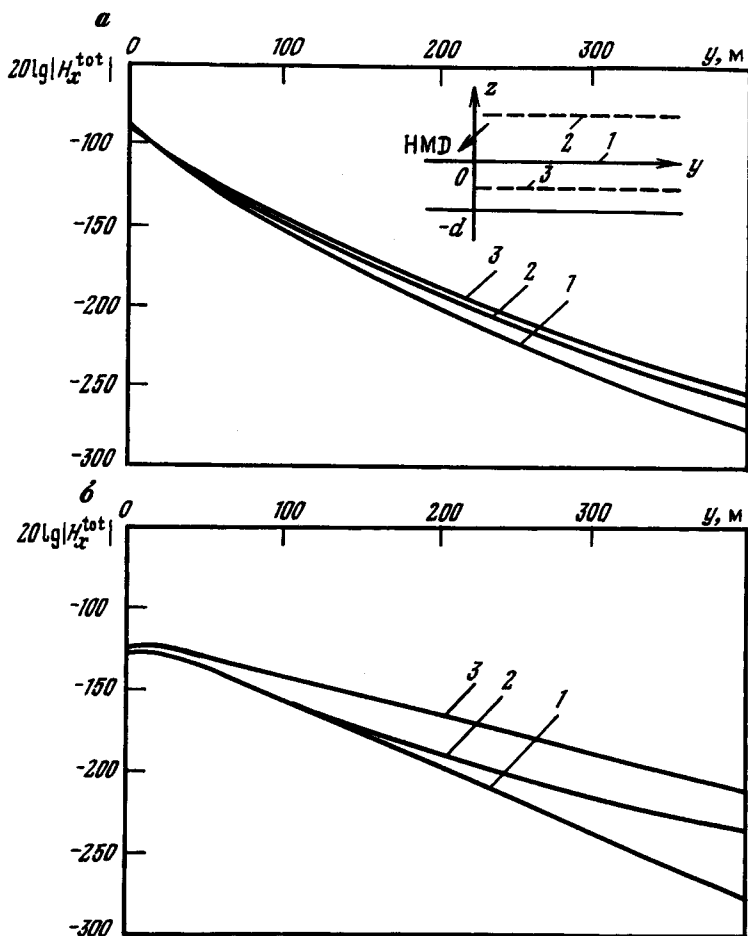


Рис. 1.16. Волноводный эффект в пластах различной толщины d :
 $a-d=10$ м; $b-d=100$ м. Источник НМД зафиксирован в точке над пластом
 $z_s=10$ м, $f=10^4$ Гц. Электродинамические параметры пласта: $\epsilon_{r,L}=7,2$,
 $\sigma_L=0,01$ См/м; окружающей среды: $\epsilon_{r,b}=20$, $\sigma_b=5 \cdot 10^{-2}$ См/м

с геометрией). На кривой 2 показано распределение $H_x^{\text{tot}}(y)$ вдоль луча 2, проходящего вне пласта на высоте $z_r=25$ м над пластом; на кривой 3 — значения $H_x^{\text{tot}}(y)$ вдоль луча 3, проходящего внутри пласта с $z_r=-5$ м. На кривой 1 — значения $H_x^{\text{tot}}(y)$ вдоль луча 2 в бесконечной однородной вмещающей среде при

отсутствии пласта. Кривая 1 приведена для оценки коэффициента затухания энергии электромагнитных волн, распространяющихся вдоль пласта. Отсюда видно, что благодаря волноводному эффекту амплитуда магнитного поля внутри пласта превышает амплитуду вне его объема и распространяется внутри пласта и вблизи него с меньшим коэффициентом затухания.

На рис. 1.16, б приведены аналогичные данные для пласта толщиной $d=100$ м. Луч 2 проходит вне пласта на высоте $z_r=70$ м над пластом, луч 3 проходит внутри пласта с $z_r=-50$ м. На кривой 1 приведены значения $H_x^{\text{tot}}(y)$ вдоль луча 2 в однородной вмещающей среде при отсутствии пласта.

Из сравнения кривых 2, 3 с кривой 1 видно, что с приближением рабочей длины волны в пласте $\lambda_L=316$ м (при частоте $f=10^4$ Гц) к значению критической длины волны $\lambda_0=2d=200$ м данного природного волновода происходит значительное уменьшение коэффициента затухания электромагнитной волны, распространяющейся вдоль пласта.

Интересно отметить, что при дальнейшем увеличении толщины пласта, имеющего $d=170$ м, коэффициент затухания практически не изменился по сравнению с предыдущим случаем ($d=100$ м).

1.5. ГИБРИДНЫЕ МЕТОДЫ ТЕОРИИ ДИФРАКЦИИ НА КРОМКАХ ПЛАСТОВ

Применение метода радиопросвечивания для обеспечения контроля за процессом разработки месторождений нефти и газа, эксплуатации подземных хранилищ газа, подземной газификации углей, решения задач геотомографии связано с исследованием дифракции электромагнитных волн на телах с кромками. В качестве простейшего объекта с кромкой при исследовании рассеяния электромагнитных волн на сложных телах в электродинамике широко применяется диэлектрический клин с острой или скругленной кромкой [22]. Данный объект может служить моделью для различного вида геологических неоднородностей: выклинивания или обрыва пласта, фронта водонефтяного (газового) контакта при интенсивной разработке пласта и др.

Рассмотрим, например, контроль за процессом разработки газоносного (нефтеносного) полосообразного пласта с применением односкважинного или межскважинного способа

радиопросвечивания. В гл. 2 приведены результаты исследования разработки полоосообразного пласта с двухфазным насыщением газ — вода системой горизонтальных скважин, когда на внешней границе пласта заданы постоянные значения давления и максимальной водонасыщенности (естественный водонапорный режим). Показано, что процесс характеризуется фронтальным вытеснением газа водой, т. е. достаточно резко выраженной движущейся границей двух значений водонасыщенности — минимальной, соответствующей незатронутой части газонасыщенного пласта, и максимальной — позади фронта. Поскольку удельное электрическое сопротивление пласта однозначно зависит от водонасыщенности, то по характеру изменения рассеянного электромагнитного поля можно в принципе решать задачу контроля за движением фронта водонасыщенности. В данном случае применения метода радиопросвечивания мы имеем дело с электродинамическим взаимодействием двух пластов с параметрами $\epsilon_{r,L2}$, σ_{L2} и $\epsilon_{r,L3}$, σ_{L3} , кромки которых совпадают с фронтом скачка водонасыщенности (см. рис. 1.1).

Для исследования дифракции электромагнитных волн на телах с кромками широко используется гибридный подход, основанный на сочетании численных и аналитических методов. При этом особое внимание уделяется вопросу постановки задачи в окрестности кромки или разрыва физических параметров на поверхности тела. В работе [18] введены понятия «равномерной» и «неравномерной» составляющих поверхностных токов, причем первые вычисляются по законам физической оптики и считаются известными, вторые связаны с наличием острой кромки. Различные численные методы для исследования дифракции на полубесконечных телах, основанные на выделении «равномерной» составляющей тока, были предложены в работах [6, 17, 33, 37, 43]. Такой подход является эффективным при рассмотрении пластов с произвольной электрической проводимостью, а также при тонком переслаивании пластов. Следует отметить, что при исследовании дифракции на однородных диэлектрических структурах и многослойных пластах возникают значительные алгоритмические трудности, связанные с необходимостью решать системы интегральных уравнений на телах со сложной геометрией. В этой ситуации использование импедансных краевых условий Леонтовича [13, 14] может оказаться полезным для широкого класса электродинамических задач.

Для анализа дифракции на пласте, имеющем форму клина с острой кромкой и импедансными краевыми условиями на

гранях пласта, используются методы Винера — Хопфа и Малюжинца [15]. Обобщение метода Малюжинца для случая наклонного падения плоской волны на некоторые клиновидные тела с острой кромкой выполнено в работе [38].

В данной работе используется метод интегральных уравнений для расчета поля и поверхностного тока в окрестности скругленных кромок на клиновидных импедансных или хорошо проводящих пластах произвольной толщины. В работах [29, 39] исследовалась дифракция на проводящем клине со скругленной кромкой на основе представления рассеянного поля в виде ряда по тригонометрическим и цилиндрическим функциям, причем коэффициенты соответствующих рядов находились путем численного решения линейных систем уравнений. Однако в силу своей принципиальной ограниченности данный метод применим лишь в случае клина с электрическим радиусом скругления кромки $ka \leq 1$ и углах раскрытия клина, превышающих 60° . Применяемый в данной работе метод интегральных уравнений [10, 20] свободен от указанных недостатков и позволяет исследовать дифракцию на проводящих и импедансных клиновидных телах с радиусом кривизны кромки вплоть до границ применимости физической оптики.

Кроме того, импеданс в окрестности кромки может быть задан в виде произвольной функции вдоль направляющей кривой. Уточнение импеданса Леонтовича и использование «эквивалентных» граничных условий [13] в окрестности кромки клина позволяют исследовать рассеивающие характеристики многослойных пластов в рамках импедансной постановки задачи. Такой подход открывает возможность создания эффективных вычислительных алгоритмов для анализа дифракции электромагнитных волн на пластах с тонким переслаиванием.

1.6. ДИФРАКЦИЯ НА КРОМКАХ ПРОВОДЯЩИХ ПОЛУБЕСКОНЕЧНЫХ ТЕЛ

Рассмотрим дифракцию E - или H -поляризованной плоской электромагнитной волны на проводящем пласте в форме клина со скругленной кромкой (рис. 1.17). При этом по определению для E -поляризованного электромагнитного поля имеем $E_z \neq 0$, $H_z = 0$; для H -поляризованного поля: $E_z = 0$, $H_z \neq 0$, где

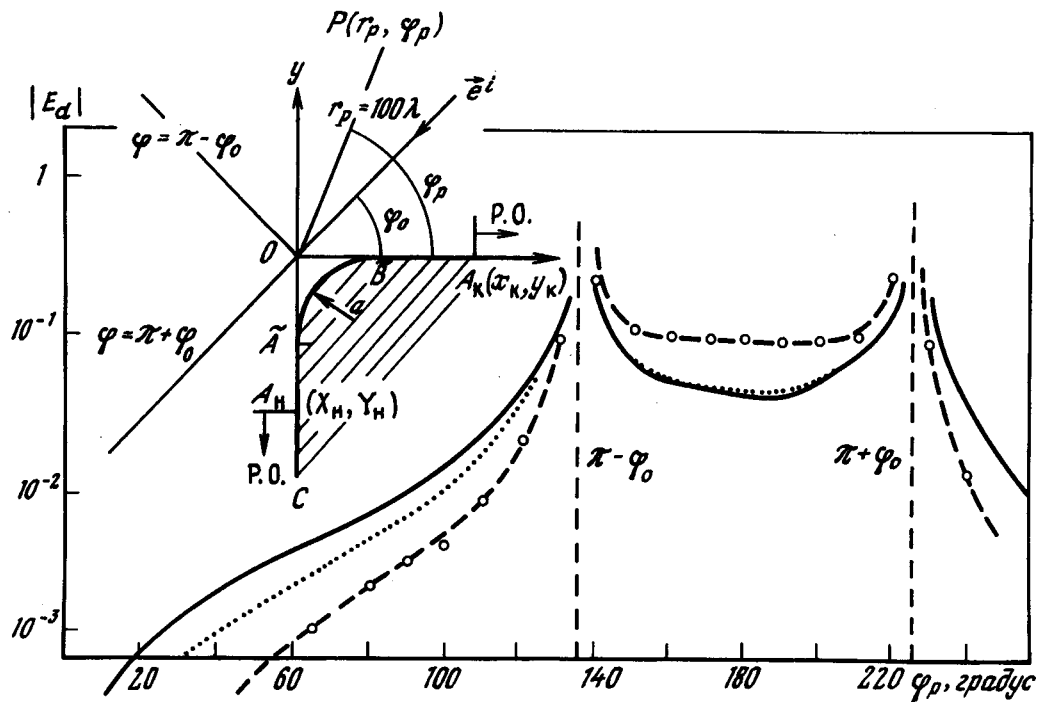


Рис. 1.17. Диаграмма рассеянного поля E_d для проводящего клина:
 $\varphi_0 = 45^\circ$, сплошная линия — острая кромка, $a = 0,03\lambda_0$; пунктир — $a = 0,25\lambda_0$; штрихпунктир — $a = 5\lambda_0$

ось z совпадает с острой кромкой соответствующего исходного клина.

Интегральные уравнения Фредгольма второго рода для плотности поверхностного тока в случае E - и H -поляризации имеют соответственно вид

$$j(p) + \frac{1}{\pi} \int_L j(q) \frac{\partial G(p, q)}{\partial n_p} dl_q = j^{(0)}(p), \quad (1.13)$$

$$j(p) - \frac{1}{\pi} \int_L j(q) \frac{\partial G(p, q)}{\partial n_q} dl_q = j^{(0)}(p), \quad (1.14)$$

где $j(p)$ — плотность поверхностного тока; $j^{(0)}(p) = 2 [\vec{n} \vec{H}^i]_\tau$ — «равномерная» составляющая поверхностного тока; τ — касательная к телу, лежащая в плоскости (xy) при H -поляризации, а при E -поляризации совпадающая с осью z ; $G(p, q) = \frac{i\pi}{2} H_0^{(1)}(k_0 r_{pq})$; $H_0^{(1)}(z)$ — функция Ханкеля первого рода; $p, q \notin L$; $E^i(p)$, $H^i(p)$ — падающее поле в точке p ; r_{pq} — расстояние между точками p и q .

В уравнениях (1.13, 1.14) правые части имеют электродинамический смысл токов физической оптики, индуцируемых волной как на освещенной, так и на затененной стороне тела.

Область задания L интегральных уравнений (1.13, 1.14) представляет собой направляющую клина с криволинейной кромкой $\tilde{A}\tilde{B}$, плавно сопряженной с лучами $\tilde{A}C$ и $\tilde{B}D$. Предполагается, что вдали от кромки на лучах $A_\kappa C$ и $A_\kappa D$ справедливо приближение физической оптики (см. рис. 1.17).

Относительно уравнений (1.13, 1.14) сделаем два замечания. Уравнение (1.13) совпадает с интегральным уравнением для внутренней задачи Неймана. Из того, что величина k_0^2 не является собственным значением внутренней задачи Неймана, следует существование и единственность решения уравнения (1.13). Условия однозначной разрешимости уравнения (1.14) рассмотрены в работе [7].

Ядра уравнений (1.13, 1.14) принадлежат к числу неограниченных ядер специального вида. При стремлении точки p к точке q для данных ядер

$$\left| \frac{\partial G(p, q)}{\partial n_{pq}} \right| \approx \frac{1}{r_{pq}} |\cos(\vec{n} \vec{r}_{pq})| \leq A \cdot r_{pq}^{\alpha-1}, \quad 0 < \alpha \leq 1,$$

всюду на кривой L , имеющей непрерывную касательную. Для таких ядер справедливы теоремы Фредгольма о существовании решений уравнений вида (1.13, 1.14).

Фактическое решение интегрального уравнения производится в точках кривой $A_n \tilde{A} \tilde{B} A_k$. Для краткости дальнейшей записи рассмотрим подробнее случай E -поляризации, когда падающая волна освещает верхнюю грань клина (см. рис. 1.13). В области глубокой тени $A_n C$ ток $j(q)$ предполагается равным нулю.

В этом случае интегральное уравнение (1.13) имеет вид

$$j(p) + \frac{1}{\pi} \int_{A_n \tilde{A} \tilde{B} A_k} j(q) \frac{\partial G(p, q)}{\partial n_p} dl_q = F(p), \quad (1.15)$$

где

$$F(p) = -\frac{1}{\pi} \int_{x_k}^{\infty} j^{(0)}(q) \frac{\partial G(p, q)}{\partial n_p} dx_q + j^{(0)}(p). \quad (1.16)$$

Численное решение интегрального уравнения (1.15) осуществляется с помощью метода Крылова-Боголюбова [10].

Вычисление правой части $F(p)$ производилось двумя способами.

1. Прямое численное интегрирование функции

$$F(p) = -\frac{ie_y k_0}{\eta_0} \int_{x_k}^{\infty} \exp(ik_0 e_x^i x_q) H_1^{(1)}(k_0 r_{qp}) \cos \psi dx_q + j^{(0)}(p), \quad (1.17)$$

где

$$j^{(0)}(p) = -\frac{2e_y^i}{\eta_0} \exp(ik_0 e_x^i x_q),$$

$\eta_0 = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0}$ — импеданс свободного пространства, $\vec{e}^i = (e_x^i, e_y^i)$ — единичный вектор направления падающей волны. Вычисление интеграла в (1.17) производилось с применением специальных квадратурных формул Гаусса.

2. Применение интегральных преобразований. В этом случае интеграл в правой части $F(p)$ был преобразован к виду

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{\pi} \int_{x_k}^{\infty} j^{(0)}(q) \frac{\partial G(p, q)}{\partial n_p} dx_q = \\
& = C \left[\cos(\vec{x}, \vec{n}_p) \frac{\partial I_1}{\partial x_p} + \cos(\vec{y}, \vec{n}_p) \frac{\partial I_1}{\partial y_p} \right], \quad (1.18)
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
\frac{\partial I_1}{\partial x_p} &= -i \int_{D_0} \frac{\cos(\xi - \varphi_p) \exp(ik_0 r_{kp} \cos \xi) d\xi}{\cos(\xi - \varphi_p) + \cos \varphi_0} + \\
& + \begin{cases} 0 & \text{при } \varphi_p < \pi + \varphi_0, \\ -2\pi \frac{\cos \varphi_0 \exp[-ik_0 r_{kp} \cos(\varphi_p - \varphi_0)]}{\sin \varphi_0} & \text{при } \varphi_p > \pi + \varphi_0, \end{cases} \quad (1.19)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial I_1}{\partial y_p} &= i \int_{D_0} \frac{\sin(\xi - \varphi_p) \exp(ik_0 r_{kp} \cos \xi) d\xi}{\cos(\xi - \varphi_p) + \cos \varphi_0} + \\
& + \begin{cases} 0 & \text{при } \varphi_p < \pi + \varphi_0, \\ -2\pi \exp[-ik_0 r_{kp} \cos(\varphi_p - \varphi_0)] & \text{при } \varphi_p > \pi + \varphi_0, \end{cases} \quad (1.20)
\end{aligned}$$

φ_0 — угол, образованный направлением падающей волны с гранью OD (рис. 1.17); отрезок r_{kp} и угол φ_p определяются из соотношений

$$x_p - x_k = r_{kp} \cos \varphi_p, \quad y_p = r_{kp} \sin \varphi_p.$$

Контур D_0 в формулах (1.19), (1.20) проведен в комплексной плоскости $\xi = (\eta, \xi)$ и задан уравнением $\cos \eta \operatorname{ch} \xi = 1$.

Вычисление контурного интеграла (1.19), (1.20) производилось методом скорейшего спуска. Практика показывает, что применение метода интегральных преобразований при вычислении правой части более эффективно, чем применение прямого численного метода. Достижение заданной точности при расчете правой части методом интегральных преобразований происходит значительно быстрее, что нетрудно увидеть из анализа соответствующих асимптотик.

Формула для расчета диаграммы рассеянного поля имеет вид

$$E^s(p) = -\frac{1}{2\pi} \int_L G(p, q) \frac{\partial E(q)}{\partial n_q} dl_q = i\eta_0 \int_L j(q) G(p, q) \frac{dl_q}{\lambda_0},$$

где $G(p, q) = \frac{i\pi}{2} H_0^{(1)}(k_0 r_{qp})$; $p(x_p, y_p)$ — точка наблюдения.

Для конфигурации, изображенной на рис. 1.17, имеем

$$\begin{aligned} E^s(p) &= -\frac{\pi\eta_0}{2} \left[\sum_{n=1}^N j_n \int_{I_{n-1}}^{I_n} H_0^{(1)}(k_0 r_{qp}) \frac{dl_q}{\lambda_0} + \right. \\ &\quad \left. + \int_{x_k}^{\infty} j^{(0)}(q) H_0^{(1)}(k_0 r_{qp}) \frac{dx_q}{\lambda_0} \right] = \\ &= -\frac{\pi\eta_0}{2} \sum_{n=1}^N j_n \int_{I_{n-1}}^{I_n} H_0^{(1)}(k_0 r_{qp}) \frac{dl_q}{\lambda_0} + \pi e_y^i \int_{x_k}^{\infty} e_q^{i\gamma x} H_0^{(1)}(k_0 r_{qp}) \frac{dx_q}{\lambda_0}, \quad (1.21) \end{aligned}$$

где $\gamma = k_0 e_x^i$; $\vec{e}^i = (e_x^i, e_y^i)$ — единичный вектор направления падающей волны.

Последний интеграл в выражении (1.21) можно представить в следующем виде:

при $\varphi < \pi$ (φ определяется из соотношений $x_p - x_k = r_{kp} \cos \varphi$, $y_p = r_{kp} \sin \varphi$)

$$\begin{aligned} \int_{x_k}^{\infty} e_q^{i\gamma x_q} H_0^{(1)}(k_0 r_{pq}) \frac{dx_q}{\lambda_0} &= -\frac{e_k^{i\gamma x_k}}{i\pi k_0} \int_{D_0} \frac{\exp(ik_0 r_{kp} \cos \xi) d\xi}{\cos \varphi^i - \cos(\xi + \varphi)} + \\ &+ \begin{cases} 0 & \text{при } \varphi > 2\pi - \varphi^i, \\ \frac{2 \exp(i\gamma x_k) \exp[-ik_0 r_{kp} \cos(\varphi_0 - \varphi)]}{k_0 \sin \varphi_0} & \text{при } \varphi < 2\pi - \varphi^i, \end{cases} \quad (1.22) \end{aligned}$$

при $\varphi > \pi$

$$\begin{aligned} \int_{x_k}^{\infty} e_q^{i\gamma x_q} H_0^{(1)}(k_0 r_{pq}) \frac{dx_q}{\lambda_0} &= -\frac{e_k^{i\gamma x_k}}{i\pi k_0} \int_{D_0} \frac{\exp(ik_0 r_{kp} \cos \xi) d\xi}{\cos \varphi^i - \cos(\xi + \varphi)} + \\ &+ \begin{cases} 0 & \text{при } \varphi < \varphi^i, \\ \frac{2 \exp(i\gamma x_k) \exp[-ik_0 r_{kp} \cos(\varphi_0 - \varphi)]}{k_0 \sin \varphi_0} & \text{при } \varphi > \varphi^i, \end{cases} \quad (1.23) \end{aligned}$$

где $\varphi^i = \pi + \varphi_0$.

В выражениях (1.22), (1.23) контур D_0 лежит в комплексной плоскости ξ .

Данный алгоритм был реализован в виде программы расчета на ЭВМ поверхностных токов и диаграммы рассеяния на проводящем клине со скругленной кромкой для единичной амплитуды падающей плоской волны.

РАССЕЯНИЕ ПОЛУБЕСКОНЕЧНЫМ ИМПЕДАНСНЫМ ТЕЛОМ

Рассмотрим случай E -поляризованного поля. Интегральное уравнение для прохождения поверхностного поля $E(p)$ имеет вид

$$E(p) + \pi \int_L E(q) k(p, q) dl_q = 2E_0(p), \quad (1.24)$$

где $E_0(p) = \exp[ik_0(e_x^i x_p + e_y^i y_p)]$ — падающее поле; $k(p, q) = iH_0^{(1)}(k_0 r_{pq}) \cos \varphi + \frac{1}{\eta_{\text{вх}}(q)} H_0^{(1)}(k_0 r_{pq})$ — ядро интегрального уравнения;

$$\cos \varphi = \frac{x_q - x_p}{r_{pq}} \cos(\vec{x}, \vec{n}_q) + \frac{y_q - y_p}{r_{pq}} \cos(\vec{y}, \vec{n}_q);$$

$\eta_{\text{вх}}(Q)$ — входной импеданс поверхности тела.

Предположим, что падающая волна освещает верхнюю грань импедансного клина с криволинейной кромкой (см. рис. 1.17). Выделим на поверхности клина области применимости физической оптики (Р. О.), лежащие достаточно далеко от кромки клина. Тогда уравнение (1.24) можно представить в виде

$$E(p) + \pi \int_{A_+ \tilde{A} B A_-} E(q) k(p, q) dl_q = -\pi \int_{x_+}^{\infty} E^{\text{Р.О.}}(q) k(p, q) dl_q + 2E_0(p), \quad (1.25)$$

где $E^{\text{Р.О.}}(Q) = E_0(Q) [1 + R(Q)]$; $R(Q)$ — коэффициент отражения:

$$R(q) = \begin{cases} (\eta_{\text{отн}} e_y^i + 1) / (\eta_{\text{отн}} e_y^i - 1) & \text{при } |\eta_{\text{отн}}(q)| \ll 1, \\ (\eta_{\text{вх}} e_y^i + 1) / (\eta_{\text{вх}} e_y^i - 1), & \text{в случае диэлектрического} \end{cases}$$

пласта толщиной d на проводящей поверхности;

$$\eta_{\text{вх}}(q) = -\frac{i\eta_{\text{отн}}}{\cos \theta} \operatorname{tg}(k_0 \cos \theta \sqrt{\epsilon_r \mu_r d});$$

ϵ_r, μ_r — относительные диэлектрическая и магнитная проницаемость пласта;

$$\cos \theta = \sqrt{1 - (e_x^i)^2 / (\epsilon_r \mu_r)}; \eta_{\text{отн}} = \sqrt{\mu_r / \epsilon_r}.$$

Интегральное уравнение (1.25) решается методом Крылова — Боголюбова аналогично уравнению (1.15).

РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННОГО АНАЛИЗА

Рассмотрим сначала вопрос о выборе величины промежуточных областей $\tilde{B}A_x$ и $\tilde{A}A_n$ (см. рис. 1.17), в которых происходит переход волны тока, возмущенной кромкой, в ток физической оптики. В работе [19] установлен принцип локального поля, согласно которому поле в окрестности кромки зависит только от значений амплитуды падающей волны в этой окрестности, геометрической формы кромки и физических свойств вещества тела. Поле в окрестности кромки не зависит от его значений в удаленных точках и может быть определено независимо.

На рис. 1.18 представлен характер изменения волны тока в окрестности скругленной кромки. Интересно отметить, что величина промежуточной области $\tilde{B}A_n, \tilde{A}A_n$ составляет при-

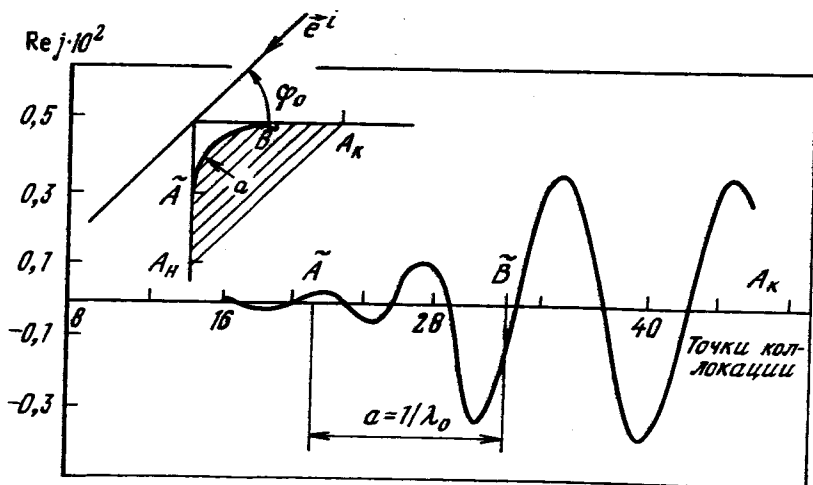


Рис. 1.18. Характер изменения волны тока в окрестности скругленной кромки, $a = \lambda_0, \varphi_0 = 45^\circ$

мерно $1 \div 2\lambda_0$ и практически не зависит от радиуса скругления кромки.

Далее необходимо рассмотреть вопрос о влиянии геометрических параметров кромки на характер дифракционного поля. Хорошо известно, что в предельном случае $\lambda_0 \rightarrow 0$ для тел с плавно меняющейся кривизной распределение токов в окрестности тени одинаково, если только кривизна поверхности и амплитуда падающей волны в данной точке одни и те же. Поэтому достаточно ограничиться геометрией скругленной кромки, рассматривая различные радиусы скругления. На рис. 1.17 представлена диаграмма поля дифракции E^d для различных значений радиуса скругления кромки. Для радиуса скругления $a = 0,03\lambda_0$ отмечается хорошее согласие между результатами численного решения и асимптотической теории для клина с острой кромкой. По мере увеличения радиуса скругления кромки наблюдается постепенное уменьшение амплитуды дифракционного поля для углов рассеяния, близких к граням клина. Для больших радиусов скругления на рис. 1.17 наблюдается сильное отличие диаграммы рассеяния от результатов для клина с острой кромкой, за исключением двух характерных углов: направления падения $\varphi = \pi + \varphi_0$ и направления зеркального отражения $\varphi = \pi - \varphi_0$.

Большой интерес представляет сравнение результатов расчета поверхностного поля в окрестности кромки полубесконечного тела, полученных на основе использования импедансных краевых условий, с результатами решения задачи в строгой постановке [33]. На рис. 1.19 приведены кривые для амплитуды поверхностного поля на тонком импедансном клине с углом раствора $\pi/8$ и радиусом скругления $a = 0,1\lambda_0$. Эти результаты сравниваются с соответствующими результатами работы [33] для проводящей полуплоскости, на которой находится диэлектрический слой. Следует отметить хорошее количественное и качественное соответствие результатов как для слоя с потерями, так и без потерь. Слои на рис. 1.19 имели толщину соответственно $0,1\lambda_0$ и $0,06\lambda_0$ и не способны были поддерживать поверхностные волны.

Результаты для слоев большей толщины на проводящем теле приведены на рис. 1.20 в случае вертикального падения на верхнюю грань тонкого проводящего клина с углом раствора $\pi/8$. Амплитуда поверхностного поля осциллирует, благодаря взаимодействию падающего и отраженного полей

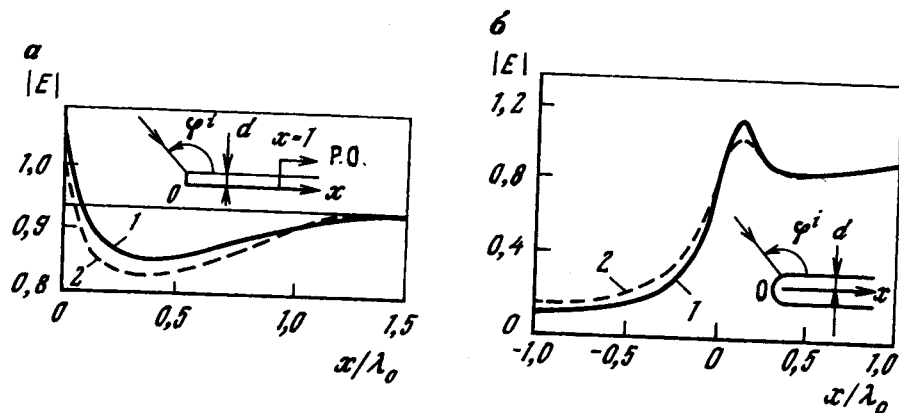


Рис. 1.19. Электрическое поле на поверхности диэлектрического слоя, покрывающего тонкий проводящий пласт:

$a-d=0,1\lambda_0$; $\epsilon_r=2,4+i$; $\mu_r=1$; $\phi^i=135^\circ$; $\delta-\delta=0,06\lambda_0$, $\epsilon_r=2,0$, $\mu_r=2,0$, $\phi^i=135^\circ$; 1—кривая из работы [33], 2—решение уравнения (1.25)

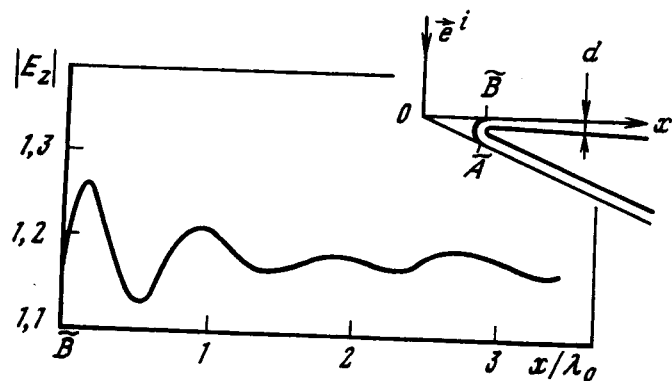
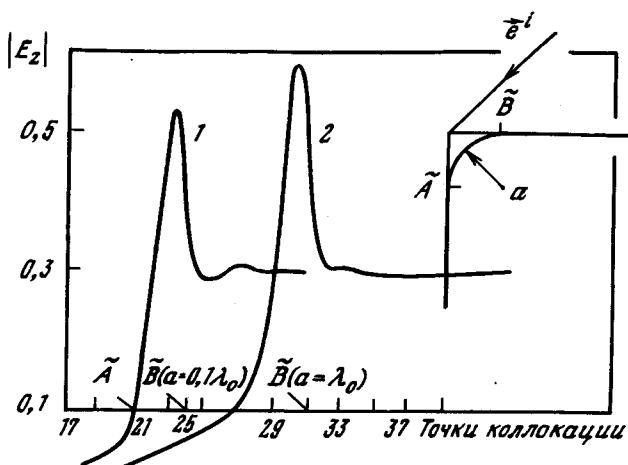


Рис. 1.20. Электрическое поле на освещенной грани тонкого проводящего клина, покрытого слоем диэлектрика $d=0,15\lambda_0$; $\epsilon_r=4,0+i$, $\mu_r=1$, $\phi^i=90^\circ$

Рис. 1.21. Электрическое поле в окрестности скругленной кромки прямоугольного импедансного клина:

$\eta_{\text{отн}} = 0,265 \times 10^{-4} - i \times 0,212 \cdot 10^{-2}$;
 $l - a = 0,1 \lambda_0$;
 $2 - a = 1,0 \lambda_0$.



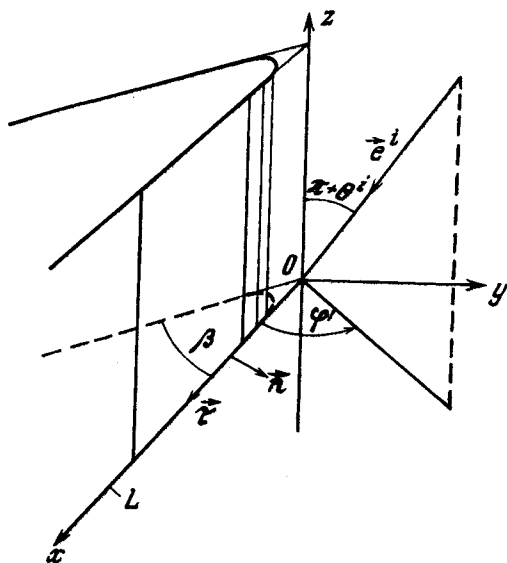
с поверхностной волной, возбуждаемой кромкой. На рис. 1.21 представлены кривые для амплитуды поверхностного поля на прямоугольном клине с малым по модулю импедансом. В отличие от монотонного изменения амплитуды тока в окрестности кромки на идеально проводящем клине амплитуда поля на импедансном клине имеет резкий скачок вблизи точки сопряжения криволинейной кромки с полуплоскостью.

1.7. КВАЗИТРЕХМЕРНЫЕ МОДЕЛИ ДИФРАКЦИИ НА КРОМКАХ ПЛАСТОВ

Исследование дифракции электромагнитных волн на телах с конечной проводимостью, поверхность которых имеет кромки, очень важно для решения многих практических задач. Для решения задач дифракции электромагнитных волн на таких телах широко применяются граничные условия Леонтовича. Хотя формально граничные условия Леонтовича неприменимы для структур с кромками, они весьма полезны при анализе дифракции на телах с нерегулярной поверхностью [15, 22, 38].

Выполненное в предыдущем разделе исследование дифракции электромагнитных волн на основе импедансной постанов-

Рис. 1.22. Импедансный клин с наклонно падающей плоской волной



ки задачи на телах с кромками показало хорошее совпадение поверхностного поля в окрестности кромки многослойного клина с соответствующими результатами решения задачи в точной постановке. Такое совпадение обусловлено характером изменения истинного значения поверхностного импеданса для клиновидного тела, отличающегося от значения входного импеданса плоской слоистой среды [2] лишь в небольшой окрестности кромки $\sim 0,1\lambda$.

Поэтому, уточняя поверхностный импеданс кромки и вводя понятие эффективных импедансных условий [13, 14], можно решать электродинамические задачи значительно более широкого класса.

В данном разделе сформулирована и решена задача дифракции плоской электромагнитной волны, падающей наклонно (квазитрехмерная дифракция) на пласт, представляющий собой импедансный клин со скругленной кромкой (рис. 1.22). Разработанные методы применяются при радиопросвечивании (геотомографии) для анализа выклинивания, наличия неоднородностей и разрывов в многослойных пластах, а также изменения флюидонасыщения при контроле за процессом разработки неоднородных пластов.

Пусть произвольно поляризованная электромагнитная волна (E^i, H^i) падает в направлении единичного вектора $\vec{e}^i = (e_x^i, e_y^i, e_z^i)$ на полубесконечное клиновидное импедансное тело со скругленной кромкой (см. рис. 1.22). Ось z совпадает с острой кромкой соответствующего исходного клина, направление $\vec{e}^i$ составляет угол θ^i с осью z , $0 < \theta^i < \pi$. Импедансные краевые условия Леонтовича имеют вид

$$\vec{E} - (\vec{n}\vec{E})\vec{n} = Z_r \eta_0 [\vec{n}\vec{H}], \quad (1.26)$$

где $\vec{n}$ — внешняя нормаль к поверхности тела; $\eta_0 = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0}$ — импеданс свободного пространства; $\vec{E}$ и $\vec{H}$ — векторы полного электромагнитного поля; импеданс $Z_r(x, y)$ — произвольная функция координат (x, y) в окрестности кромки и не зависит от z вдоль каждой образующей на поверхности тела. Представим полное поле (с временной зависимостью $\exp(-i\omega t)$) в следующем виде:

$$\vec{E} = \vec{E}(x, y) \exp(ik_0 e_z^i z); \quad \vec{H} = \vec{H}(x, y) \exp(ik_0 e_z^i z), \quad (1.27)$$

где $e_z^i = \cos \theta^i$; $k_0 = 2\pi/\lambda$.

Тогда решение задачи дифракции сводится к нахождению компонент электрического $E_z(x, y)$ и магнитного $H_z(x, y)$ полей.

Введем вектор-столбец

$$\vec{f}_z(p) = \begin{pmatrix} E_z(p) \\ \eta_0 H_z(p) \end{pmatrix}, \quad (1.28)$$

где p — точка на плоскости xy .

Интегральное уравнение для нахождения $\vec{f}_z(p)$ на поверхности тела имеет вид

$$\vec{f}_z(p) = \frac{1}{\pi} \int_L \left(\frac{\partial \vec{G}(p, q)}{\partial n_q} \vec{f}_z(q) - \vec{G}(p, q) \frac{\partial \vec{f}_z(q)}{\partial n_q} \right) dl_q + 2\vec{f}_z^i(p), \quad (1.29)$$

где

$$\vec{G}(p, q) = \begin{pmatrix} G(p, q) & 0 \\ 0 & G(p, q) \end{pmatrix};$$

$$G(p, q) = \frac{i\pi}{2} H_0^{(1)}(k^1 r_{pq}); \quad k^1 = k_0 \sin \theta^i;$$

p, q лежат на кривой L (см. рис. 1.22); $H_0^{(1)}(z)$ — функция Ханкеля 1-го рода;

$$\bar{f}_z^i(p) = \begin{pmatrix} E_z^i(p) \\ \eta_0 H_z^i(p) \end{pmatrix} = \bar{F}_{0z} \exp [ik_0 (e_x^i x_p + e_y^i y_p)]; \quad (1.30)$$

$\bar{F}_{0z} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ — в случае TM_z -поляризации (при $H_z = 0$); $\bar{F}_{0z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ — в случае TE_z -поляризации (при $E_z = 0$).

Нормальную производную $\partial \bar{f}_z(q) / \partial n$ в точках q на направляющей кривой L на основании краевого условия (1.26) можно представить в виде линейного преобразования вектора $\bar{f}_z(q)$:

$$\frac{\partial \bar{f}_z(q)}{\partial n_q} = \bar{A} \bar{f}_z(q), \quad (1.31)$$

где матрица $\bar{A}$ имеет вид

$$\bar{A} = \begin{vmatrix} -\frac{ik_0 \sin^2 \theta^i}{Z_r} & \cos \theta^i \frac{\partial}{\partial \tau} \\ -\cos \theta^i \frac{\partial}{\partial \tau} & -iZ_r k_0 \sin^2 \theta^i \end{vmatrix}; \quad (1.32)$$

$\frac{\partial}{\partial \tau}$ — производная вдоль касательной к кривой L (см. рис. 1.22).

После нахождения вектора $\bar{f}_z(q)$ в точках q на направляющей кривой L полное поле $\bar{f}_z^{\text{tot}}(q)$ вне тела находим согласно выражению

$$\bar{f}_z^{\text{tot}}(p) = \frac{1}{2\pi} \int_L \left(\frac{\partial \bar{G}(p, q)}{\partial n_q} \bar{f}_z(q) - \bar{G}(p, q) \frac{\partial \bar{f}_z(q)}{\partial n_q} \right) dl_q + \bar{f}_z^i(p). \quad (1.33)$$

Вектор $\bar{f}_z(p)$ играет роль векторного потенциала поля, так как все компоненты поля могут быть получены через $\bar{f}_z(p)$. Ниже рассмотрим некоторые частные случаи дифракции, вытекающие из представлений поля в виде выражений (1.29) — (1.33).

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ИДЕАЛЬНО ПРОВОДЯЩЕГО ТЕЛА

Краевые условия для идеально проводящего тела можно получить из уравнений (1.31) — (1.32) путем перехода к пределу $Z_r \rightarrow 0$. Выполняя предельный переход, получаем

$$E_z(q)|_L = 0, \quad \frac{\partial (\eta_0 H_z(q))}{\partial n_q} |_L = 0. \quad (1.34)$$

Используя условия (1.34) и уравнение (1.29), получим два хорошо известных независимых интегральных уравнения:

$$\frac{1}{2\pi} \int_L G(p, q) \frac{\partial E_z(q)}{\partial n_q} dl_q = E_z^i(p); \quad (1.35)$$

$$H_z(p) - \frac{1}{\pi} \int_L H_z(q) \frac{\partial G(p, q)}{\partial n_q} dl_q = 2H_z^i(p). \quad (1.36)$$

Решение уравнений (1.35), (1.36) осуществляется гибридным методом, основанным на использовании асимптотических полей на гладких, выпуклых участках поверхности, достаточно далеко лежащих от нерегулярных элементов (ребер) на поверхности тела. При этом уравнения (1.35), (1.36) решаются только в нерегулярной окрестности тела.

Функции $\partial E_z / \partial n_q$, H_z в уравнениях (1.35), (1.36) имеют физический смысл плотности поверхностных токов и определяются согласно выражениям

$$\frac{\partial E_z(q)}{\partial n(q)} = -i\omega\mu_0 j_z(q) \quad \text{для уравнения (1.35),}$$

$$H_z(q) = j_\tau(q) \quad \text{для уравнения (1.36),}$$

где $j(q) = [\vec{n}\vec{H}(q)]$; $\vec{\tau}$ — единичный вектор касательной к направляющей кривой L в плоскости (xy) .

ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ИМПЕДАНСНОГО ТЕЛА

Рассмотрим применение гибридного метода для исследования дифракции на импедансном или на проводящем клиновидном теле, покрытом однородным диэлектрическим слоем. Используем в качестве импеданса $Z_n(x, y)$ в краевом условии (1.26) либо поверхностный импеданс $Z_r = \sqrt{\mu_r/\epsilon_r}$, при условии $|Z_r| \ll 1$, либо входной импеданс слоистой среды $Z_{вх}$, определенный согласно выражению [2]:

$$Z_{вх} = -\frac{i\sqrt{\mu_r/\epsilon_r}}{\chi} \operatorname{tg}(k_0\sqrt{\epsilon_r\mu_r}d\chi); \quad (1.37)$$

$$\chi = \sqrt{1 - \sin^2(\vec{n}\vec{e}^i)/(\epsilon_r\mu_r)};$$

ϵ_r, μ_r — комплексные диэлектрическая и магнитная проницаемость слоя. Интегральное уравнение (1.29) в окрестности кромки клиновидного тела решается методом коллокаций [10], вне этой окрестности кромки вектор $\vec{f}_z(p) = \vec{f}_z^{AS}(p)$ находится из решения вспомогательной задачи. Интегралы по полубесконечным отрезкам $[x_k, \infty]$ вне окрестности кромки на направляющей кривой L с известными значениями $\vec{f}_z^{AS}(p)$ составляют дополнительные слагаемые в правой части уравнения (1.29).

Вспомогательную задачу для нахождения асимптотического значения $\vec{f}_z^{AS}$ поставим на полуплоскости, являющейся освещенной гранью исходного клина с острой кромкой (см. рис. 1.26). Тогда интегральное уравнение (1.29) принимает вид

$$\vec{f}_z^{AS}(x_p) = -\frac{1}{\pi} \int_L \vec{G}(x_p, x_q) \frac{\partial \vec{f}_z^{AS}(x_q)}{\partial n_q} dx_q + 2\vec{f}_z^i(x_p). \quad (1.38)$$

Для простоты дальнейших вычислений ограничимся случаем нормального падения к оси z : $\theta^i = \pi/2$, $0 < \varphi' < \pi$. Уравнение (1.38) распадается на два независимых скалярных уравнения для E - и H -поляризаций, первое из которых имеет вид

$$E_z^{AS}(x_p) + \frac{\pi}{Z_{\text{ВХ}}} \int_L E_z^{AS}(x_q) H_0^{(1)}(k_0 |x_p - x_q|) dx_q = 2E_z^i(x_p), \quad (1.39)$$

где $E_z^i(x_p) = \exp(ik_0 e^i_x x_p)$.

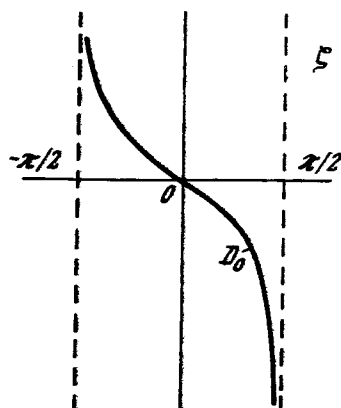
Подставим в уравнение (1.39) вместо точного решения функцию вида

$$\Phi(x_p) = A \exp(ik_0 e^i_x x_p), \quad (1.40)$$

где коэффициент A подлежит определению. Для вычисления результата применения интегрального оператора K к функции $\Phi(x_p)$ в уравнении (1.39) воспользуемся представлением функции Ханкеля:

$$H_0^{(1)}(k_0 |x_p - x_q|) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dK_x \frac{\exp[iK_x(x_p - x_q)]}{\sqrt{k_0^2 - K_x^2}},$$

Рис. 1.23. Контур интегрирования D_0 на плоскости ζ



где K_x принадлежит комплексной плоскости. Для значения интегрального оператора на функции $\varphi(x_p)$ получим

$$\begin{aligned}
 K\varphi(x_p) &= \int_0^\infty A \exp(ik_0 e_x^i x_p) H_0^{(1)}(k_0 |x_p - x_q|) dx_q = \\
 &= \frac{A \exp(ik_0 e_x^i x_p)}{\pi e_y^i} + \frac{A}{i\pi(2\pi)} \int_{D_0} \frac{\exp(ik_0 r_{kp} \cos \zeta) d\zeta}{\cos \zeta - \cos(\pi - \varphi')}, \quad (1.41)
 \end{aligned}$$

где контур D_0 принадлежит комплексной плоскости ζ (рис. 1.23). В выражении (1.41) интеграл по контуру D_0 при $k_0 x_p \gg 1$ имеет величину порядка $1/\sqrt{k_0 x_p}$ [18] и, поскольку интегральный оператор K ограничен в пространстве функций $C(0, \infty)$, то функция (1.40) является неубывающей частью решения интегрального уравнения (1.39). Подставляя выражение (1.40), (1.41) в уравнение (1.39), получим значение коэффициента A :

$$A = 1 + R; \quad R = (Z_{xx} e_y^i + 1) / (Z_{xx} e_y^i - 1). \quad (1.42)$$

Коэффициент R имеет физический смысл коэффициента отражения от импедансной плоскости.

Отсюда видно, что вдали от кромки при условии $k_0 x_P \gg 1$ функция $E_z^{AS}(x_P)$ на импедансной поверхности является суммой падающего и отраженного полей.

Рассмотрим выражение (1.33), которое описывает структуру рассеянного поля вне импедансного клина. Пусть, как и в предыдущем случае, освещена только верхняя грань клиновидного тела, т. е. $0 < \varphi' < \pi$, $\theta^i = \pi/2$ (см. рис. 1.22).

Принимая во внимание, что в области геометрической тени поверхностное поле стремится к нулю по мере удаления от кромки, а в освещенной области краевое возмущение носит локальный характер, интеграл по направляющей L в (1.33) можно представить в виде двух слагаемых: по локальной окрестности кромки, где величина поверхностного поля получается из решения интегрального уравнения (1.29), и по полубесконечному отрезку $[x_K, \infty)$ в освещенной области, где поверхностное поле носит равномерный характер и описывается выражением (1.40). В точке наблюдения P дальней зоны интеграл по локальной окрестности кромки описывает ту часть рассеянного поля, которая убывает по закону $1/\sqrt{k_0 r_P}$; r_P — расстояние до точки P . Второе слагаемое — интеграл по отрезку $[x_K, \infty)$ в области существования зеркально отраженного луча $\varphi_P < \pi - \varphi'$ в случае E -поляризации имеет вид

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_{x_K}^{\infty} \left[E_z^{AS}(Q) \frac{\partial G(p, q)}{\partial y_q} - G(p, q) \frac{\partial E_z^{AS}(q)}{\partial y_q} \right] dx_Q = \\ & = R \exp(ik_0 e^i_x x_K) \exp[-ik_0 r_{KP} \cos(\varphi' + \varphi_P)] - \\ & - \frac{(1+R)}{2} \frac{i}{2\pi} \exp(ik_0 e^i_x x_K) \int_{D_0} \frac{\exp(ik_0 r_{KP} \cos \zeta) \sin(\zeta + \varphi_0) d\zeta}{\cos \varphi' + \cos(\zeta + \varphi_P)} + \\ & + \frac{(1+R)}{2Z_{\text{вх}}} \frac{i}{2\pi} \exp(ik_0 e^i_x x_K) \int_{D_0} \frac{\exp(ik_0 r_{KP} \cos \zeta) d\zeta}{\cos \varphi' + \cos(\zeta + \varphi_P)}, \end{aligned} \quad (1.43)$$

$$r_{KP} = \sqrt{(x_P - x_K)^2 + y_P^2}.$$

Первое слагаемое в правой части (1.43) описывает плоскую волну, отраженную от освещенной грани, второе

и третье слагаемые при условии $\varphi_P \neq \pi - \varphi'$ описывают цилиндрические волны с амплитудой $1/\sqrt{k_0 r_{kp}}$, расходящиеся от линии $x = x_k$, лежащей в плоскости (x, z) .

РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННОГО АНАЛИЗА

Применение гибридного метода в теории дифракции основано на использовании принципа локального поля, согласно которому поле в окрестности нерегулярной части поверхности рассеивающего тела (линии разрыва физических параметров, кромки и т. п.) зависит только от значений поля падающей волны в этой окрестности, геометрической формы кромки и физических свойств вещества тела. Поле в окрестности кромки не зависит от его величины в удаленных точках и может быть определено независимо. На рис. 1.19 были приведены графики амплитуды поверхностного поля на тонком импедансном клине с углом раствора $\pi/8$ и радиусом скругления кромки $a = 0,1\lambda$. В результате численных экспериментов было установлено, что регулярный характер поверхностного поля устанавливается на расстоянии от кромки клина $x_k \approx 15\lambda$ (в свободном пространстве) и $x_k \approx (1 \div 2)\lambda$ (во вмещающем пространстве с потерями). Сравнение с соответствующими результатами работы [33] для проводящей полуплоскости (тонкий полубесконечный пласт), покрытой диэлектрическим слоем, показало хорошее количественное и качественное соответствие результатов как для диэлектрического слоя с потерями, так и без потерь. Величина поверхностного импеданса была постоянной и вычислялась по формуле (1.37). Графики поведения амплитуды электрического поля в окрестности кромки на поверхности диэлектрического слоя различной толщины, покрывающего проводящую полуплоскость, были показаны на рис. 1.19.

На рис. 1.20 приведены результаты для диэлектрического слоя большей толщины (равной $d = 0,15\lambda$) на поверхности тонкого проводящего клина с углом раствора $\pi/8$ для вертикального падения на грань клина. Как было отмечено, амплитуда поверхностного поля испытывает осцилляции, возникающие благодаря взаимодействию падающего и отраженного полей с поверхностной волной, возбуждаемой кромкой. Соответствующая диаграмма поля дифракции E_z^d (т. е. той части полного поля, которая равна $E_z^{\text{tot}} - (E_z^i + E_z^{\text{отр}})$), где

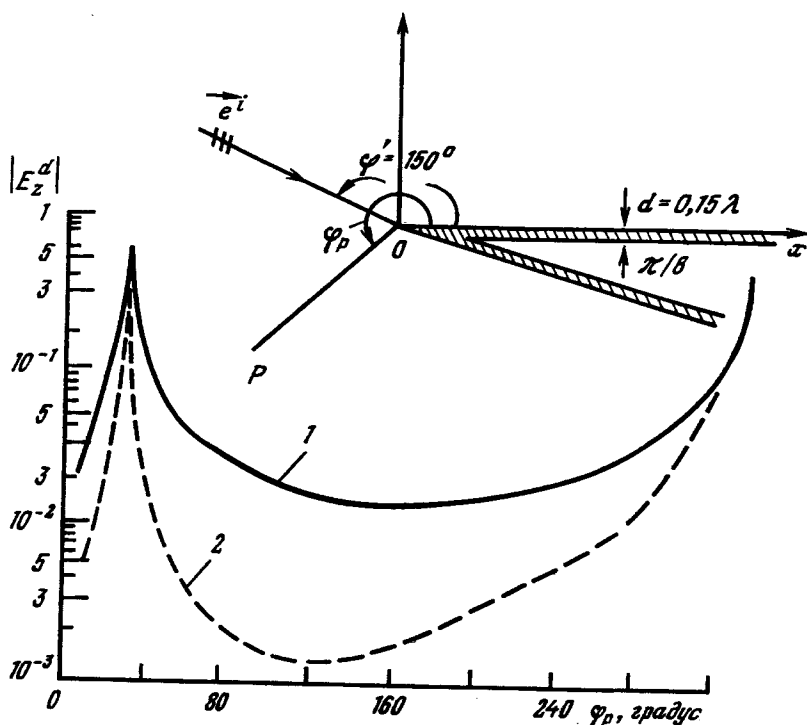


Рис. 1.24. Диаграмма поля дифракции E_z^d :
 1 — идеально проводящий клин; 2 — импедансный клин, соответствующий покрытию толщиной $d=0,15\lambda$, $\epsilon_r=4,0+i$, $\mu_r=1$; $\theta^i=\pi/2$; $\varphi^i=150^\circ$

$E_z^{\text{отр}}$ — поле, отраженное от граней клина) приведена на рис. 1.24, откуда видно, что наличие диэлектрического слоя с потерями на проводящем клине приводит к значительному уменьшению амплитуды поля дифракции в обратном направлении.

1.8. ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ КРОМОК ПЛАСТОВ

В данном разделе на основе гибридного подхода проведено исследование электродинамического взаимодействия двух полубесконечных проводящих слоев произвольной толщины, кромки которых обращены навстречу друг другу и образуют щель шириной s (рис. 1.25).

Взаимное влияние двух таких полубесконечных полуплит, образующих щель, описывается с любой степенью



При анализе проблем электромагнитной совместимости, радиолокационного обнаружения, проникновения электромагнитного импульса одним из главных вопросов является исследование двумерной дифракции электромагнитных волн на щелях в идеально проводящих экранах. Вопросу дифракции на щелях в бесконечно тонких идеально проводящих экранах посвящено большое число работ (см., например [12, 30, 34, 35]). При этом широко применяется метод моментов для нахождения решения дифракционной задачи.

81

такой задачи, основанный на использовании многократной дифракции на двух клиньях со скругленными кромками, предложен в работах [28, 29]. Следует отметить, что этот приближенный метод справедлив только для малых радиусов a скругления, когда $ka \ll 1$, и при ширине щели s , удовлетворяющей условию $ks \gg 1$ ($k = 2\pi/\lambda$ — волновое число свободного пространства).

Рассмотрим дальнейшее развитие гибридного подхода [22], позволяющее с любой степенью точности учитывать взаимное влияние двух полубесконечных проводящих плит, образующих щель. Исходным моментом при постановке проблемы является формулировка интегрального уравнения для определения вектора электрического тока на всей бесконечной поверхности двух полубесконечных слоев. Далее, в соответствии с принципом локальности поля, поверхностные токи в точках, достаточно далеко удаленных от кромок, принимаются равными своим асимптотическим значениям, получаемым в результате решения соответствующих модельных задач. В оставшейся конечной области вблизи кромок слоев неизвестные токи находятся из решения интегрального уравнения, отличающегося от исходного тем, что в его правой части появились дополнительные слагаемые, обусловленные неизвестными значениями асимптотических токов в неограниченных областях поверхности рассматриваемых слоев.

ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧИ

Пусть в проводящей плите толщиной $2a$ имеется щель шириной s . Вдоль оси z щель бесконечно протяженная (поперечный разрез щели плоскостью $z=0$ показан на рис. 1.25). В направлении единичного вектора $\vec{e}^i = (e_x^i, e_y^i)$ на щель падает E -поляризованная электромагнитная волна $E_z^i = E_0 \exp[ik(e_x^i x + e_y^i y)]$.

В соответствии с гибридным методом в двухмерной теории дифракции [22] выделим границы кромок щели, где должны быть определены нерегулярные токи, кривыми $L_1 = A_{n1} \tilde{A}_1 \tilde{B}_1 A_{k1}$ и $L_2 = A_{n2} \tilde{A}_2 \tilde{B}_2 A_{k2}$, а также области (A_{k1}, A_1^∞) , (A_{k2}, A_2^∞) , где заданы регулярные токи физической оптики. Полное поле в любой точке P вне системы, состоящей из двух

полубесконечных плит, является суперпозицией поля падающей волны и полей, возбуждаемых регулярными и нерегулярными токами:

$$E_z^{\text{tot}}(p) = E_z^i(p) + E_{z,\text{REG}}^{(1)}(p) + E_{z,\text{REG}}^{(2)}(p) + E_{z,\text{NR}}^{(1)}(p) + E_{z,\text{NR}}^{(2)}(p), \quad (1.44)$$

где поля $E_{z,\text{NR}}^{(1)}(p)$, $E_{z,\text{NR}}^{(2)}(p)$ возбуждаются нерегулярными токами $j_z(q)$ на кривых L_1 , L_2 . Эти токи $j_z(q)$ определяются параметрами падающей волны, геометрическими параметрами кромки и электродинамическим взаимодействием двух кромок. Относительно регулярных токов $j_z^{\text{REG}}(q)$ предполагаем, что на полубесконечных отрезках $(A_{\kappa 1}, A_1^\infty)$, $(A_{\kappa 2}, A_2^\infty)$, достаточно далеко удаленных от кромок, токи $j_z^{\text{REG}}(Q)$ совпадают с токами физической оптики

$$j_z^{\text{REG}}(Q) = -\frac{2e_y^i}{\eta_0} \exp(ik e_x^i x_0)$$

(принцип локального поля), где $\eta_0 = \sqrt{\mu_0 / \varepsilon_0}$ — импеданс свободного пространства.

Электрические поля $E_{z,\text{REG}}^{(1)}(p)$, $E_{z,\text{REG}}^{(2)}(p)$, $E_{z,\text{NR}}^{(1)}(p)$, $E_{z,\text{NR}}^{(2)}(p)$ в формуле (1.44) можно выразить через соответствующие регулярные и нерегулярные токи $j_z^{\text{REG}}(q)$ и $j_z(q)$. Используя для этого векторный потенциал в виде

$$A_z(P) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{A_H}^{A_K} j_z(q) dl_Q \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(ik R_{pq})}{R_{pq}} dz_Q,$$

$$R_{pq} = \sqrt{(x_p - x_q)^2 + (y_p - y_q)^2 + z_q^2}$$

и интегральное представление функции Ханкеля

$$H_0^{(1)}(kr_{pq}) = \frac{1}{i\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(ik \sqrt{r_{pq}^2 + z_q^2})}{\sqrt{r_{pq}^2 + z_q^2}} dz_q,$$

$$r_{pq} = \sqrt{(x_p - x_q)^2 + (y_p - y_q)^2},$$

получим общее выражение для электрического поля, возбуждаемого токами на любом отрезке кривой (A_H, A_K) в плоскости (x, y) (см. рис. 1.25):

$$E_z(p) = -\frac{k\eta_0}{4} \int_{A_R}^{A_K} j_z(q) H_0^{(1)}(kr_{pq}) dl_q, \quad (1.45)$$

где $p = (x_p, y_p)$; $q = (x_q, y_q)$.

Опуская точку p в представлении поля (1.44) на каждую из кривых L_1, L_2 , используя выражение (1.45) и краевое условие на идеально проводящей поверхности экрана

$$E_z^{\text{tot}}(p) = 0_{|L_1 + L_2},$$

получим интегральное уравнение для определения токов $j_z(q)$ на кривых L_1, L_2 :

$$\begin{aligned} \int_{L_1 + L_2} j_z(q) H_0^{(1)}(kr_{pq}) \frac{dl_q}{\lambda} &= \frac{2}{\pi\eta_0} E^i(p) - \\ &- \int_{A_{K1}}^{A_1^\infty} j_z^{\text{REG}}(q) H_0^{(1)}(kr_{pq}) \frac{dl_q}{\lambda} - \int_{A_{K2}}^{A_2^\infty} j_z^{\text{REG}}(q) H_0^{(1)}(kr_{pq}) \frac{dl_q}{\lambda}. \end{aligned} \quad (1.46)$$

Для вычисления интегралов в правой части (1.46) применено представление функции Ханкеля

$$H_0^{(1)}(kr_{pq}) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp[iK_x(x_p - x_q) + i|y_p - y_q|\sqrt{k^2 - K_x^2}]}{\sqrt{k^2 - K_x^2}} dK_x,$$

где K_x принадлежит комплексной плоскости, а также применен способ интегральных преобразований, предложенный в работах [4, 18].

В результате интегралы в правых частях уравнения (1.46) можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} \int_{A_{K1}}^{A_1^\infty} j_z^{\text{REG}}(q) H_0^{(1)}(kr_{pq}) \frac{dl_q}{\lambda} &= \\ &= -\frac{2e^i}{\eta_0} \exp(ike_x^i x_K^{(1)}) \left[\frac{1}{i2\pi^2} \int_{D_0} \frac{\exp(ikr_{xp}^{(1)} \cos \xi) d\xi}{\cos(\xi - \varphi_p) + \cos \varphi_0} + \right. \end{aligned}$$

$$+ \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ - \frac{\exp[-ikr_{kp}^{(1)} \cos(\varphi_p - \varphi_0)]}{\pi e_y^i}, \end{array} \right. \begin{array}{l} \varphi_p < \pi + \varphi_0, \\ \varphi_p > \pi + \varphi_0, \end{array} \quad (1.47)$$

$$\begin{aligned} & \int_{A_{k2}}^{A_2^\infty} j_z^{\text{REG}}(q) H_0^{(1)}(kr_{pq}) \frac{dl_q}{\lambda} = \\ & = \frac{2e_y^i}{\eta_0} \exp(-ike_x^i x_k^{(2)}) \left[\frac{1}{i2\pi^2} \int_{D_0} \frac{\exp(ikr_{kp}^{(2)} \cos \xi) d\xi}{\cos(\xi - \varphi_p) + \cos \varphi_0} + \right. \\ & \left. + \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ \frac{\exp[-ikr_{kp}^{(2)} \cos(\varphi_p - \varphi_0)]}{\pi e_y^i}, \end{array} \right. \right. \begin{array}{l} \varphi_p > \pi + \varphi_0, \\ \varphi_p < \pi + \varphi_0, \end{array} \quad (1.48) \end{aligned}$$

В выражениях (1.47), (1.48) интегрирование по контуру D_0 проводится в комплексной плоскости $\xi = (\xi, \eta)$. Контур D_0 задан уравнением $\cos \eta \cdot \text{ch} \xi = 1$ ($-\pi/2 \leq \eta \leq \pi/2$; $-\infty \leq \xi \leq \infty$); $x_k^{(1)}$, $x_k^{(2)}$ — соответствующие координаты точек $A_{k1} = (x_k^{(1)}, 0)$, $A_{k2} = (x_k^{(2)}, 0)$ на рис. 1.25; $r_{kp}^{(1)}$, $r_{kp}^{(2)}$ — расстояния $|A_{k1} - p|$, $|A_{k2} - p|$, где $p \in L_1 + L_2$.

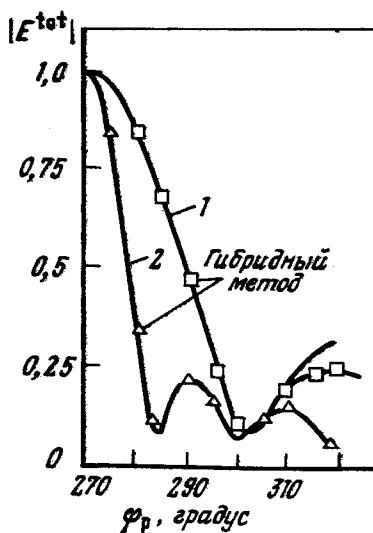
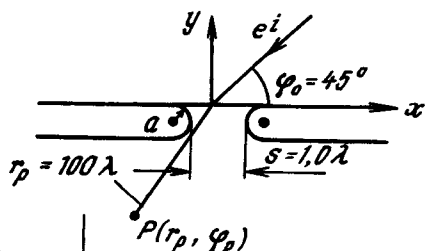
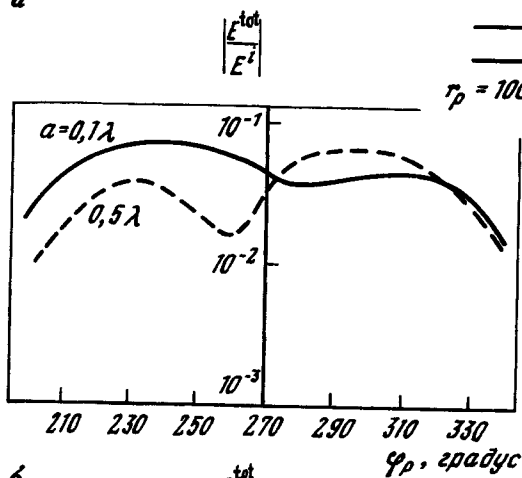


Рис. 1.26. Нормализованная диаграмма поля за целью:
 $l-s=2\lambda$; $2-s=4,18\lambda$ [результаты из работы [29]]

a



б

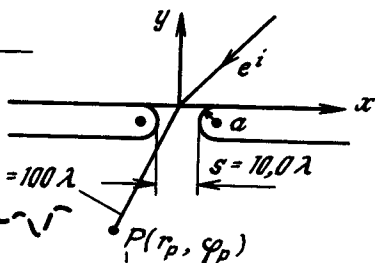
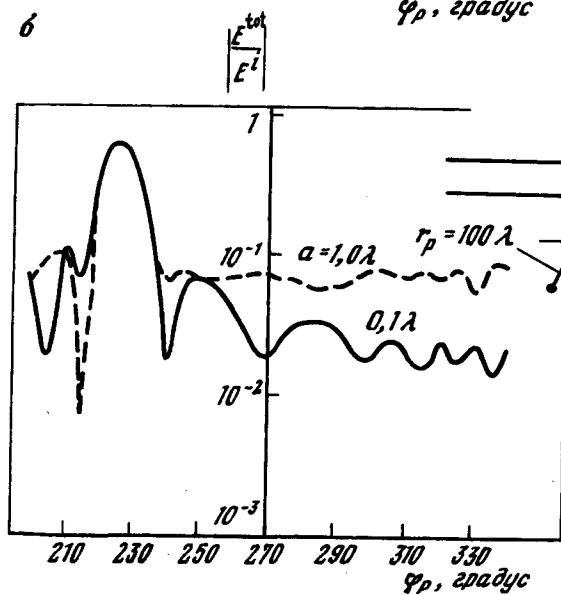
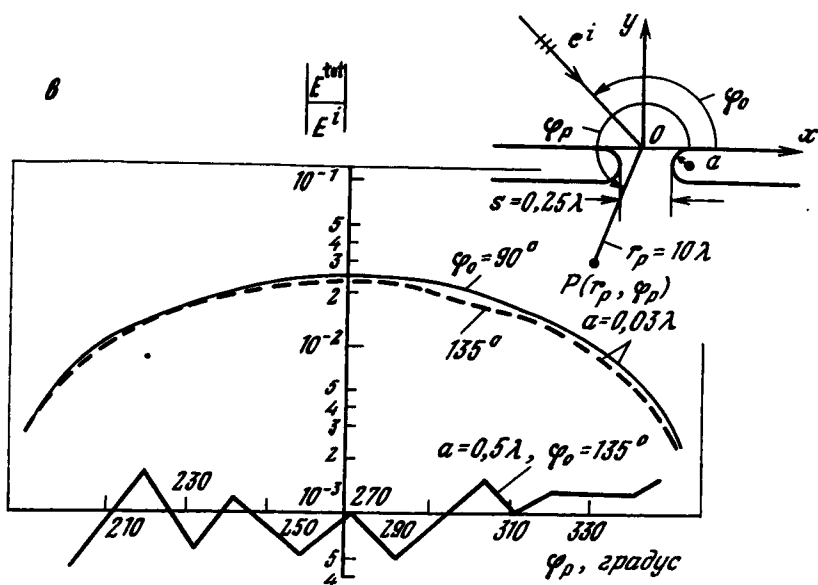


Рис. 1.27. Диаграмма поля $|E^{\text{tot}}|$ за щелью



Интегральные представления (1.47), (1.48) весьма удобны для применения численных методов интегрирования, поскольку подынтегральные функции справа в (1.47), (1.48) при $|\xi| \rightarrow \infty$ имеют вид $\exp(-|\xi|)$.

Неизвестная функция $f_z(q)$ в точках q на кривой $L_1 + L_2$ находится из интегрального уравнения (1.44) с помощью метода Крылова — Боголюбова.

Полное поле в любой точке p вне системы, состоящей из двух полубесконечных плит (см. рис. 1.25), находится согласно соотношению

$$E_z^{\text{tot}}(p) = -\frac{\pi}{2} \eta_0 \int_L j_z(q) H_0^{(1)}(kr_{pQ}) \frac{dl_q}{\lambda} + E_z^i(P), \quad (1.49)$$

где L — полный контур поперечного сечения системы двух плит на рис. 1.25.

В формуле (1.49) при интегрировании по полубесконечным отрезкам (A_{x1}, A_1^∞) , (A_{x2}, A_2^∞) , где индуцированные токи совпадают с токами физической оптики, применяются соотношения, аналогичные (1.47), (1.48). При интегрировании вдоль криволинейных кромок используются квадратурные формулы Гаусса.

При использовании гибридных методов возникает проблема разбиения поверхности тела на регулярную и нерегулярную компоненты. На регулярных частях (гладких кусках поверхности с радиусами кривизны $R_{1,2} \gg \lambda$), не имеющих зон затенения со стороны других элементов тела, поверхностные токи принимаются равными своим асимптотическим значениям [18]. На нерегулярных частях (кромках, изломах, зонах затенения) поверхностные токи необходимо находить как решения интегрального уравнения (1.46). Из физических соображений очевидно, что при достаточно большой ширине щели s , когда взаимное влияние двух кромок L_1 и L_2 (см. рис. 1.25) незначительное, распределение поверхностных токов на каждой кромке щели будет приблизительно таким же, как на одиночной полуплоскости или на тонком клине [22]. Как показали численные расчеты, удовлетворительное совпадение с токами на одиночной полуплоскости происходит при ширине щели $s > 10\lambda$. Кроме того, для сравнения использованы результаты работы [29] по дифракции на двух клиньях, полученные на основе приближенного асимптотического метода. На рис. 1.26 приведено сопоставление нормализованной диаграммы поля за щелью с $s = 2\lambda$ и $s = 4,18\lambda$ (при $a = 0,064\lambda$, $\varphi_0 = \pi/2$) с соответствующими результатами из работы [29]. Из графиков рис. 1.26 видно, что для $s = 4,18\lambda$ результаты хорошо согласуются друг с другом, в то время как для $s = 2\lambda$ при больших углах отклонения от направления падающей волны ($\varphi^i = 270^\circ$) кривые не совпадают. Это можно объяснить погрешностью метода [29], справедливого только при условии $ks \gg 1$.

На рис. 1.27, а представлены две диаграммы поля $|E^{tot}|$ за щелью шириной $s = \lambda$ с радиусом скругления кромки $a = 0,1\lambda$ и $0,5\lambda$ при наклонном падении волны с углом $\varphi_0 = 45^\circ$. Нерегулярный характер кривой с радиусом $a = 0,5\lambda$ обусловлен сильным взаимным влиянием двух кромок.

На рис. 1.27, б показано влияние на диаграмму $|E^{tot}|$ щели большой ширины $s = 10\lambda$ при $a = 0,1\lambda$ и λ . Интересно отметить, что правая ветвь кривой с радиусом $a = \lambda$ значительно превышает ту же ветвь кривой с радиусом $a = 0,1\lambda$, тогда как главные лепестки двух диаграмм совпадают в направлении $\varphi_p = 225^\circ$ прямо вперед по падающей волне.

Эффект узкой щели при $s=0,25\lambda$, образованной кромками двух пластов, показан на рис. 1.27, в для двух радиусов скругления кромок: $a=0,03\lambda$ и $0,5\lambda$. Отметим, что в случае радиусов скругления кромок двух плит $a=0,5\lambda$ при наклонном падении на щель с углом $\varphi=45^\circ$ имеет место частичное затенение кромки щели. Амплитуда поля $|E^{\text{tot}}|$ за щелью в тонком экране ($a=0,03\lambda$) практически не зависит от направления падающей волны и уменьшается при увеличении радиуса скругления ($a=0,5\lambda$) кромки экрана.

МОДЕЛИРОВАНИЕ РАЗРАБОТКИ НЕФТЕГАЗОНАСЫЩЕННЫХ КОЛЛЕКТОРОВ ГОРИЗОНТАЛЬНЫМИ СКВАЖИНАМИ

Данная глава посвящена созданию эффективных алгоритмов и программ ЭВМ для моделирования процессов разработки месторождений с низкопроницаемыми коллекторами системой горизонтальных скважин. Анализ производительности и нефтеотдачи пласта показывает значительно большую эффективность применения горизонтальных скважин по сравнению с вертикальными [2,56, 12]. Вместе с тем при исследовании притока к горизонтальным скважинам необходимо учитывать целый ряд существенно новых эффектов.

Одной из основных трудностей при создании математической модели разработки месторождений горизонтальными скважинами является формулировка алгоритма, дающего описание двух пространственно-временных разномасштабных гидродинамических процессов: фильтрации многофазной жидкости в пласте-коллекторе и течения смеси в самом стволе горизонтальной скважины. Адекватная обобщенная гидродинамическая модель работы горизонтальной скважины наряду с описанием процессов фильтрации в пласте должна включать также описание двух основных процессов в стволе скважины: движения многофазной системы в трубах и сохранения массы жидкости (уравнение неразрывности, учитывающее приток жидкости из пласта через стенку скважины).

На начальном этапе создания методик расчета работы горизонтальной скважины ствол представляли в виде линии равных стоков. Однако такая модель нарушает истинное распределение давления в скважине по ее длине, когда давление монотонно падает от окончания скважины к ее устью, благодаря динамическому напору и потере давления флюида на

трение (устье скважины — пересечение горизонтальной части ствола с вертикальным участком скважины). При этом предположении оказывается, что минимальное значение давления в скважине не в устье, а в средней точке ее горизонтального участка. В этом нетрудно убедиться, рассмотрев решение модельной задачи о стационарном притоке жидкости к горизонтальной скважине конечной длины $2L_0$ в однородном пласте большой толщины. Тогда решение уравнения Пуассона имеет вид: $p_k + p(M)$, где p_k — пластовое давление вдали от скважины; функция $p(M)$ имеет вид:

$$p(M) = -\frac{1}{4\pi\lambda} \iiint_V \frac{q(N)}{R_{MN}} dV_N = -\frac{q}{4\pi\lambda} \int_{-L_0}^{L_0} \frac{dx_N}{\sqrt{(x_M - x_N)^2 + a^2}}.$$

Здесь предполагается, что скважина является линией равных стоков с осью, проходящей вдоль координаты x ; длина горизонтального участка скважины равна $2L_0$; λ — константа, зависящая от проницаемости пласта, плотности и вязкости жидкости; q — приток массы на единицу длины скважины; давление $p(M)$ рассматривается в точках M , отстоящих на расстояние a от оси скважины. Вблизи от оси скважины имеем $a/L_0 = \varepsilon \ll 1$. Вычисляя приведенный выше интеграл для давления $p(M)$ в окрестности середины скважины при $x_M = 0$, получаем

$$p(M)|_{x_M=0} = \frac{q}{4\pi\lambda} \ln \frac{\varepsilon^2}{4}.$$

Давление $p(M)$ в окрестности концов скважины при $x_M = \pm L_0$ равно

$$p(M)|_{x_M=\pm L_0} = \frac{q}{4\pi\lambda} \ln \frac{\varepsilon}{4}.$$

Сопоставляя два последних выражения и принимая во внимание, что $\varepsilon \ll 1$, нетрудно убедиться, что давление $p(M)$ в точках, близких к середине линии стока, значительно меньше давления вблизи ее концов.

Аналитические модели работы скважины с открытым горизонтальным стволом в предположении постоянного давления на так называемом «контуре питания» в окрестности горизонтального ствола предложены в работах [5—7]. В этих работах сделана первая попытка создания математических моделей

горизонтальной скважины с учетом массообмена скважины с окружающей средой. Применение феноменологического предположения о пропорциональности притока массы флюида к скважине значению разности давления на «контуре питания» и в стволе позволяет рассматривать пласт и скважину как единую гидродинамическую систему. Однако предположение о постоянном давлении на «контуре питания» справедливо только для скважины бесконечной длины в однородном пласте; в общем случае для скважины конечной длины это предположение несправедливо.

2.1. ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧИ

Математическая модель основана на применении двумерной теории фильтрации, описывающей течение двухфазной системы вода — газ. Фильтрационное движение газа предполагается изотермическим, а уравнение состояния газа включает в себя коэффициент сжимаемости, что обеспечивает описание реальных газовых смесей. Начальные условия дают описание исходной водонасыщенности пласта в виде произвольной функции на горизонтальной плоскости (x, y) , а также начальное распределение давления, являющееся однородным. Граничные условия представляют собой краевые условия первого или второго рода.

Использование метода конечных разностей [1,14] позволяет поставить в соответствие исходной системе нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных систему алгебраических уравнений.

Основные уравнения двухфазной фильтрации в горизонтальном пласте имеют вид:

$$\partial(m\rho_\alpha s_\alpha)/\partial t + \operatorname{div}(u_\alpha \rho_\alpha) + q_\alpha = 0, \quad (2.1)$$

где $u_\alpha = -K \cdot [k_\alpha(s_\alpha)/\mu_\alpha] \operatorname{grad} p_\alpha$,

$s_w + s_g = 1$, $\alpha = w$ (вода), g (газ),

Здесь m — пористость; ρ_α , s_α , p_α , μ_α — плотность, насыщенность, давление и вязкость компоненты α , q_α — интенсивности массового отбора воды и газа, u_α — скорость переноса компоненты α ; K — коэффициент абсолютной проницаемости; $k_\alpha(s_\alpha)$ — коэффициент относительной проницаемости. Ниже будем обозначать $s = s_w$.

Для простоты предположим, что выполнены условия: $m, K, \rho_a, \mu_a, \mu_r = \text{const}, p_a = p_r = p, \rho_r = C_1 p, C_1 = \text{const}$.

Будем предполагать также, что интенсивности отбора воды и газа связаны соотношением: $q_a = q_r \lambda_a / \lambda_r$, где $\lambda_a = K \cdot k_a(s) \rho_a / \mu_a$.

Уравнения (2.1) решаются с учетом движения воды и газа в горизонтальном стволе скважины. Для этого рассмотрим основные уравнения гидродинамики в трубах с учетом притока жидкости со стороны поверхности трубы.

Уравнение неразрывности течения газа внутри горизонтальной скважины (координата L направлена вдоль оси скважины, $0 < L < L_0$):

$$-\partial(\rho u) / \partial L + q(x, y) = 0, \quad (2.2)$$

уравнение движения газа в стволе горизонтальной скважины [2]:

$$\beta u \partial u / \partial L = -\frac{1}{\rho} \partial p / \partial L + \gamma |u|^n = 0, \quad (2.3)$$

где $q(x, y)$ — массовый приток газа через стенки скважины, коэффициенты β, n и γ определяются параметром Рейнольдса $Re = |u| \rho d / \mu$. При $Re < Re_{cr} \approx 2300$ течение будет ламинарным с $\beta = 2, n = 1, \gamma = 32 \mu / (\rho d^2)$. При $Re \gg Re_{cr}$ течение будет турбулентным с $\beta = 1,1 \div 1,2, n = 2, \gamma = \gamma_{trb} / (2d)$, где для коэффициента γ_{trb} существуют различные эмпирические оценки.

Рассмотрим оценку по формуле Альтшуля:

$$\gamma_{trb} \approx 0,11 \left[\frac{K_s}{d} + \frac{68}{Re} \right]^{1/4},$$

где K_s — эквивалентная шероховатость стенок скважины. Для стальных труб $K_s \approx 0,06 \div 1$ мм, что дает при $d \approx 0,2$ м при больших значениях Re $\gamma_{trb} \approx 0,01 \div 0,03$.

Примерно такие же значения получают по формуле Никурадзе, справедливой при больших величинах Re :

$$\gamma_{trb} \approx \left[1,75 + 2 \lg \frac{d}{2\Delta} \right]^{-2},$$

где Δ — абсолютная шероховатость (при $\Delta = 1$ мм $= 0,01 d / 2$ $\gamma_{trb} \approx 0,03$).

Оценим скорость течения флюида в скважине. Очевидно, ее максимальное значение будет в устье:

$$u|_{L=0} = u_0, |u_0| = 4Q / (\pi d^2 p_{пл}),$$

где Q означает интенсивность отбора газа из скважины и измеряется в кубометрах в сутки. Будем полагать, что $Q \approx 10^4 \div 10^6 \text{ м}^3/\text{сут}$, $p_{\text{пл}} \approx 10^4 \text{ кПа}$, $d \approx 0,2 \text{ м}$, $v \approx 10^{-7} \text{ м}^2/\text{с}$. Тогда $|u_0| \geq 0,04 \text{ м/с}$, $\text{Re} \geq 0,8 \cdot 10^5 \gg \text{Re}_{\text{cr}}$.

Оценим возникающий вдоль горизонтальной скважины перепад давлений. Интегрируя уравнение (2.2) вдоль скважины и предполагая, что интенсивность притока газа через стенки примерно постоянна вдоль скважины, можно получить (учитывая, что $u|_{L=0} = u_0$, $u|_{L=L_0} = 0$):

$$u = |u_0| \left[\frac{L}{L_0} - 1 \right] \leq 0,$$

откуда имеем

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial L} = |u_0|^2 [\lambda (L/L_0 - 1)^2 - \beta (L/L_0 - 1)/L_0] \geq 0.$$

Далее, учитывая, что $\rho = C_1 p$, $C_1 \approx \text{const}$, получим:

$$\ln [p(L=L_0)/p(L=0)] = C_1 |u_0|^2 \int_0^{L_0} [\gamma_{\text{trb}} (L/L_0 - 1)^2 - \beta (L/L_0 - 1/L_0)] dL = C_1 |u_0|^2 [\gamma_{\text{trb}} L_0 / (6d) + \beta / 2].$$

При $C_1 = 10^{-5} \text{ с}^2/\text{м}^2$, $Q \leq 10^6 \text{ м}^3/\text{сут}$, $\gamma_{\text{trb}} \leq 0,03$, $L_0 / (6d) \approx 500$, $\beta \leq 1,2$ имеем:

$$\ln [p(L=L_0)/p(L=0)] \leq 10^{-5} \cdot 15,6 \cdot 16 \approx 0,0025.$$

Отсюда видно, что перепад давления вдоль оси скважины незначителен и давление практически постоянное вдоль ее оси. В этом случае при оценке производительности горизонтальных скважин (в частности, горизонтальных нефтяных скважин при низкой скорости движения нефти по стволу) можно пренебречь потерями давления по стволу [2].

Вместе с тем учет потерь давления необходим при значительной длине горизонтальной части ствола, больших дебитах скважин, существенном влиянии конструктивных особенностей скважины, движении смеси в сложных стволах и т. д.

Математическая модель динамики движения газа в пласте и в горизонтальном стволе скважины основана на совместном решении системы нелинейных уравнений (2.1)—(2.3). Для численного решения данной системы применяется метод конечных разностей. В исследуемой области (газонасыщенный

пласт) вводится разностная сетка по пространству и времени $\omega = \omega_{hx} \times \omega_{hy} \times \omega_t$, в узлах которой рассматриваются функции давления и насыщенности воды (газа). Предполагая для простоты записи, что ось скважины совпадает с отрезком на какой-либо сеточной линии, в узлах этого отрезка, согласно уравнениям (2.2), (2.3), имеем помимо неизвестной функции давления дополнительные неизвестные: $u(x, y)$ — линейную скорость газа и $q(x, y)$ — расход газа на единицу длины скважины. Уравнения (2.1) — (2.3) аппроксимируем нелинейной относительно функций p, u, q разностной схемой, которую решаем, применяя итерационный процесс типа Зейделя — Гаусса.

Уравнения (2.1) — (2.3) рассмотрим в прямоугольной области $(x, y) \in (0, L_x) \times (0, L_y)$.

Применим два варианта граничных условий:

1) условия первого рода (условия Дирихле):

$$p(x, y, t)|_{\partial G} = p_1, \quad s(x, y, t)|_{\partial G} = s_1; \quad (2.4)$$

2) условия второго рода (условия Неймана, соответствующие непроницаемым границам области):

$$\left. \frac{\partial p}{\partial n} \right|_{\partial G} = 0. \quad (2.5)$$

Начальные условия:

$$p(x, y, t=0) = p_0, \quad s(x, y, t=0) = s_0(x, y),$$

где $s_0(x, y)$ имеет вид параболы в сечении любой плоскостью, параллельной координатным осям, причем на границе $s_0(x, y)|_{\partial G} = s_1$, а минимум этой функции достигается в центре области:

$$\min s_0(x, y) = s_0(L_x/2, L_y/2) = s_2.$$

Рассмотрим следующий вид функций относительной проницаемости:

$$\begin{aligned} k_v(s) &= (s - s_{v,\min})^3 / s_{v,\max}^3, \\ k_r(s) &= (s_{r,\max} - s)^3 / (s_{r,\max} - s_{r,\min})^3, \end{aligned} \quad (2.6)$$

где $s_{v,\min}$, $s_{v,\max}$, $s_{r,\min}$ и $s_{r,\max}$ — минимальная и максимальная водонасыщенности для газа и воды соответственно.

Заметим, что в случае граничного условия первого рода при $s_1 = s_{r,\max}$ будет отсутствовать поток газа через границы области, так как тогда $u_r|_{\partial G} = 0$.

В качестве уравнения состояния газа будем использовать следующее известное соотношение:

$$p_r = Cp/Z(p), \quad C = v/(RT_{пл}) = \text{const},$$

где R — газовая постоянная; $T_{пл}$ — температура в пласте в градусах Кельвина; v — молекулярная масса газа в г/моль.

Функцию $Z(p)$ аппроксимируют параболической функцией $Z(p) = ap^2 + bp + c$, используя ее известные табличные значения (соответствующие рассматриваемому месторождению) в трех характерных точках:

$$Z(p=0,10 \text{ МПа}) = 1, \quad Z(p_{пл}) = Z_{пл}, \quad Z(p_{ср}) = Z_{ср}.$$

Для каждой горизонтальной скважины задаем координаты ее устья и окончания, а также суммарный объемный отбор газа (в $\text{м}^3/\text{сут}$), $V_{\text{сум}} = Q_{\text{сум}}/\rho_{г, \text{атм}}$, где $\rho_{г, \text{атм}}$ — плотность газа при нормальных условиях.

Из уравнений (2.1) можно получить эквивалентную систему уравнений:

$$\begin{aligned} m(1-s)\rho_r^{-1}\partial\rho_r/\partial t + q_r[1+\psi(s)]/\rho_r = \\ = \rho_b^{-1}\text{div}(\lambda_b \text{grad } p) + \rho_r^{-1}\text{div}(\lambda_r \text{grad } p), \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$m\rho_b\partial s/\partial t + q\rho_b\psi(s)/\rho_r = \text{div}(\lambda_b \text{grad } p), \quad (2.8)$$

где $\psi(s) = k_b(s)\mu_r/[k_r(s)\mu_b]$, из которой, в частности, можно оценить характерные времена изменения концентрации воды (t_s) и давления (t_p):

$$t_s \sim mD^2\mu_b/(Kp), \quad t_p \sim mD^2 \cdot \min(\mu_b, \mu_r)/(Kp),$$

где p , D — характерные значения давления и диаметра пространственной области. В силу того, что $\mu_r \ll \mu_b$, получаем $t_p \ll t_s$, т. е. функция давления должна изменяться много быстрее, чем функция концентрации воды.

2.2. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ АЛГОРИТМ

Для численного интегрирования нелинейных уравнений (2.1)—(2.3) применяется метод конечных разностей [14]. В рассматриваемой области вводится разностная сетка по пространству и времени $\omega = \omega_{h_x} \times \omega_{h_y} \times \omega_\tau$, в узлах которой рассматриваем функции давления и концентрации воды:

$$\omega_{h_x} = \{x_i, i=0,1, \dots, N_x, x_0=0, x_{N_x}=L, h_{x_i}=x_i-x_{i-1}\},$$

$$\omega_{h_y} = \{y_j, j=0,1, \dots, N_y, y_0=0, y_{N_y}=L_y, h_{y_j}=y_j-y_{j-1}\},$$

$$\omega_\tau = \{t_k, k=0,1, \dots, t_0=0, \tau_k=t_k-t_{k-1}\}.$$

Пространственный шаг сетки уменьшается по заданному алгоритму в окрестности каждой горизонтальной скважины.

Аппроксимируем уравнения (2.1)—(2.3) неявной разностной схемой, представляющей собой на каждом слое по времени систему уравнений для неизвестных сеточных функций давления и концентрации $\hat{p}$, $\hat{s}$ на верхнем слое t_{k+1} по времени:

$$\begin{aligned} F_1(\hat{p}, \hat{s}) = & m(1-s^{(0,5)})p_i[d\rho/dp]^{(0,5)}/R_r + \langle q_r \rangle [1+\psi(\hat{s})]/R_r - \\ & - \rho_b^{-1}[\lambda_{b,i+1/2,j}(\hat{s})\hat{p}_x]_{\bar{x}} - [\lambda_{r,i+1/2,j}(\hat{p}, \hat{s})\hat{p}_x]_{\bar{x}}/R_r - \\ & - \rho_b^{-1}[\lambda_{b,i,j+1/2}(\hat{s})\hat{p}_y]_{\bar{y}} - [\lambda_{r,i,j+1/2}(\hat{p}, \hat{s})\hat{p}_y]_{\bar{y}}/R_r = 0, \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$\begin{aligned} F_2(\hat{p}, \hat{s}) = & m\rho_b s_i + Q_r \psi(\hat{s})\rho_b/R_r - (\lambda_{b,i+1/2,j}^*(\hat{s})\hat{p}_x)_{\bar{x}} - \\ & - (\lambda_{b,i,j+1/2}^*(\hat{s})\hat{p}_y)_{\bar{y}} = 0. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Здесь обозначено:

$$f_i = (\hat{f} - f)/\tau, \quad f^{(0,5)} = (f + \hat{f})/2, \quad \tau = t_{k+1} - t_k,$$

$$f = f(x_i, y_j, t_k), \quad \hat{f} = f(x_i, y_j, t_{k+1}), \quad R_r = \rho_r(p)^{(0,5)},$$

$$f_x = (f_{i+1,j} - f_{i,j})/h_{x_{i+1}}, \quad f_{\bar{x}} = (f_{i,j} - f_{i-1,j})/\bar{h}_{x_i},$$

$$f_y = (f_{i,j+1} - f_{i,j})/h_{y_{j+1}}, \quad f_{\bar{y}} = (f_{i,j} - f_{i,j-1})/\bar{h}_{y_j},$$

$$\bar{h}_{x_i} = (h_{x_i} + h_{x_{i+1}})/2, \quad \bar{h}_{y_j} = (h_{y_j} + h_{y_{j+1}})/2,$$

$$\lambda_{\alpha,i+1/2,j} = (\lambda_{\alpha,i+1,j} + \lambda_{\alpha,i,j})/2,$$

$$\lambda_{\alpha,i,j+1/2} = (\lambda_{\alpha,i,j+1} + \lambda_{\alpha,i,j})/2, \quad \langle q_r \rangle = V^{-1} \int_V q_r dV,$$

где $V = \bar{h}_{x_i} \cdot \bar{h}_{y_j}$ — объем ячейки при узле (i, j) :

$$V = [(x_{i-1} + x_i)/2, (x_{i+1} + x_i)/2] \cdot [(y_{j-1} + y_j)/2, (y_{j+1} + y_j)/2].$$

Сеточные функции $\lambda_{\alpha,i+1/2,j}^*$ и $\lambda_{\alpha,i,j+1/2}^*$ определяем в (2.10) в соответствии с принципом донорности, т. е. сносим по потоку:

$$\lambda_{\alpha,i+1/2,j}^* = \begin{cases} \lambda_{\alpha,i,j} & \text{при } p_{i,j} > p_{i+1,j}, \\ \lambda_{\alpha,i+1,j} & \text{при } p_{i,j} < p_{i+1,j}; \end{cases}$$

$$\lambda_{\alpha,i,j+1/2}^* = \begin{cases} \lambda_{\alpha,i,j} & \text{при } p_{i,j} > p_{i,j+1}, \\ \lambda_{\alpha,i,j+1} & \text{при } p_{i,j} < p_{i,j+1}. \end{cases}$$

На основании оценок, выполненных в разделе 2.1, давление $p(t)$ в данной горизонтальной скважине примем равным одному и тому же значению $p(t)$ вдоль ствола, которое зависит только от момента времени t разработки пласта. Значение $p(t)$ определяется значением дебита этой скважины путем решения системы (2.9), (2.10).

Систему уравнений (2.9), (2.10) будем решать итерационным методом Зейделя, определяя сначала значения p^{n+1} из (2.9) при фиксированных величинах s^n , а затем s^{n+1} из (2.10), используя p^{n+1} .

$$F_1(p^{n+1}, s^n) = 0, \quad F_2(p^{n+1}, s^{n+1}) = 0, \quad n = 0, 1, \dots \quad (2.11)$$

Если итерационный процесс (2.11) сходится, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p^n = \hat{p}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} s^n = \hat{s}.$$

В качестве начального приближения в итерациях берем значения сеточных функций на нижнем временном слое; условием окончания итераций служит достижение заданной точности ε_f по каждой из переменных $f = p, s$ на соседних итерациях:

$$\max_{i,j} |p_{i,j}^{n+1} - p_{i,j}^n| < \varepsilon_p, \quad \max_{i,j} |s_{i,j}^{n+1} - s_{i,j}^n| < \varepsilon_s.$$

Если число итераций велико ($n > n_{\max}$), то шаг по времени τ делим пополам и производим пересчет данного временного слоя.

В свою очередь, для определения значений p^{n+1} из уравнения $F_1(p^{n+1}, s^n) = 0$ при фиксированных значениях s^n используется подпрограмма ORTOM2, основанная на комбинации метода Холецкого неполной декомпозиции матрицы системы и итерационного метода сопряженных градиентов [11]. Критерием окончания итераций здесь служит уменьшение нормы невязки интегрируемого уравнения (2.9) до заданной величины $\varepsilon_{\text{pres}}$. Значения s^{n+1} из (2.10) находятся явным образом после определения p^{n+1} из (2.9).

2.3. ОДНОМЕРНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ

Для отработки вычислительной методики и выявления характерных особенностей решения задачи (2.9)—(2.11) большое значение имеют одномерные модели разработки месторождений горизонтальными скважинами, которые описывают про-

цесс двухфазной фильтрации в сечении пласта вертикальной плоскостью, перпендикулярной к стволам бесконечно длинных скважин. Пусть сечение пласта проходит параллельно оси x , тогда уравнения (2.9)—(2.11) решаются в области $0 < x < L$ с граничными условиями

$$p(x=0, t) = p(x=L, t) = p_0, \quad (2.12)$$

$$s(x=0, t) = s(x=L, t) = s_1 < s_{\max} < 1 \quad (2.13)$$

при начальных данных

$$p(x, t=0) = p_0, \quad s(x, t=0) = s_0(x),$$

где $s_0(x)$ представляет собой параболу по x , причем $s_0(0) = s_0(L) = s_1$,

$$\min s_0(x) = s_0(L/2) = s_2, \quad s_1 > s_2.$$

Рассмотрим функцию отбора газа, соответствующую случаю одной скважины, расположенной в точке $x = x_0$:

$$q_r(x) = q_r^0 \delta(x - x_0), \quad q_r^0 = \text{const}. \quad (2.14)$$

Уравнение (2.9) в одномерном случае интегрируется с помощью известного метода трехточечной прогонки [14].

В силу того, что граничные условия и функции отбора компонент не зависят явным образом от времени, имеется возможность существования стационарных решений, которые удовлетворяют следующим уравнениям:

$$\frac{d}{dx} \left(\lambda_\alpha \frac{dp}{dx} \right) = q_\alpha, \quad \alpha = \text{в}, \text{г}, \quad 0 < x < L, \quad (2.15)$$

$$p(x=0) = p(x=L) = p_0, \quad s(x=0) = s(x=L) = s_1.$$

Заметим, что при граничных условиях вида (2.13) в случае $s_{\text{г}, \max} = s_{\text{в}, \max} = s_1$ в выражении (2.6) для функции относительной проницаемости стационарного решения не существует при

$$\int q_r dx = \text{const} > 0, \quad \text{так как при этом варианте} \left(\lambda_r \frac{dp}{dx} \right) \Big|_0^L \equiv 0.$$

В качестве приближенных функций относительной проницаемости вместо (2.6) рассмотрим зависимости

$$k_{\text{в}}(s) = s^2, \quad k_{\text{г}}(s) = (1-s)^2, \quad (2.16)$$

для которых, при $s_1 < 1$ и $s_2 > 0$, через границы области происходит приток газа. Аналогичный эффект (вместе с существованием стационарного решения) будет наблюдаться и для системы

(2.9), (2.10) с фазовыми проницаемостями, задаваемыми формулой (2.6), если на границе области будет выполняться: $s|_{zG} = s_1$, $s_1 < s_{г, \max}$, $s_{в, \max}$.

Из выражения (2.15) следует, что

$$\lambda_{\alpha} p_x = C_{\alpha} + q_{\alpha}^0 \theta(x - x_0),$$

$$\text{где } C_{\alpha} = \text{const}, \alpha = в, г, \theta(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Откуда получим:

$$\lambda_{в}(s)/\lambda_{г}(p, s) = C_{в}/C_{г} = q_{в}^0/q_{г}^0 = \text{const},$$

$$p(s) = \text{const} \cdot k_{в}(s)/k_{г}(s).$$

Интегрируя уравнение для концентрации s

$$A k_{в}(s) d[k_{в}(s)/k_{г}(s)]/dx = C_{в} + q_{в}^0 \theta(x - x_0),$$

получим соотношение для определения s :

$$\Phi(s) = \Phi(s_{\max}) - q_{в}^0 (1 - x_0/L) x/A + \\ + \begin{cases} 0 & \text{при } x < x_0, \\ q_{в}^0 (x - x_0)/A & \text{при } x > x_0. \end{cases}$$

$$\text{Здесь } A = K(\rho_{в}/\mu_{в})^2 \mu_{г} C_{г}/(C_{в} C) = \text{const},$$

$$\Phi(s) = \int k_{в}(s) \cdot d[k_{в}(s)/k_{г}(s)].$$

Для варианта (2.16)

$$\Phi(s) = 2 \cdot [1 - s - 3 \cdot \ln(1 - s) - 3/(1 - s) + 0,5/(1 - s)^2].$$

Очевидно, при слишком большой величине $q_{в}^0$ значение концентрации может упасть ниже значения $s_{в, \min}$. Чтобы этого избежать, должно выполняться условие

$$q_{в}^0 < A [\Phi(s_{\max}) - \Phi(s_{\min})]/[x_0(1 - x_0/L)].$$

Найденные аналитические решения применялись в качестве теста для проверки вычислительного алгоритма. Длина пространственной области в расчетах $L = 500$ м, эксплуатационная скважина располагалась в центре пространственной области ($x_0 = L/2$) и имела интенсивность $q_{г}^0 = 30$ кг·м/(м³·сут). Параметры разностного алгоритма выбирались: $N = 50$, $\varepsilon = 0,001$. На рис. 2.1 представлены результаты численных расчетов характерных пространственных профилей концентрации воды и давления для последовательных моментов времени с интервалом в 1 год. Со временем (примерно за 4 года для данного

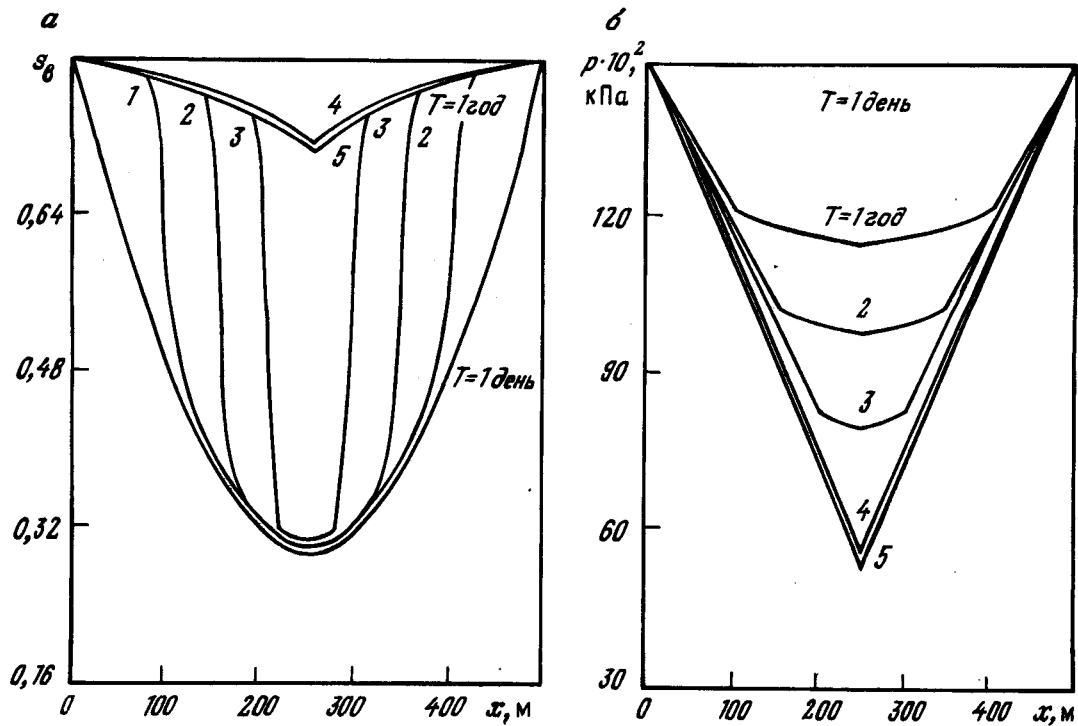


Рис. 2.1. Профили концентрации воды s_w (а) и давления p (б) для последовательных моментов времени при одномерной модели разработки пласта горизонтальной скважиной, проходящей вдоль середины пласта через точку $x_0 = 250$ м

варианта) устанавливается стационарный режим, совпадающий с описанным выше аналитическим решением. Профили концентрации демонстрируют «ударные волны», распространяющиеся от границ области к центру по спадающему распределению. Эти волны, очевидно, связаны с гиперболическим типом уравнений относительно концентрации s_b . Пока эти волны не достигнут центральной пространственной области, водонасыщенность в ней практически не меняется и равна начальной.

Одномерные численные расчеты также показали, что при задании функции отбора газа вида (2.14) давление может падать до нуля и ниже (особенно при отсутствии притока газа через границы области), что, как очевидно, лишено физического смысла. Это связано с независимостью функции q_r отбора газа от давления в ходе разработки пласта. Можно предложить следующую, свободную от данного недостатка, модификацию функции отбора:

$$\tilde{q}_r = q_r \cdot (p - p_{\text{атм}}) / (p_0 - p_{\text{атм}}), \quad (2.17)$$

где q — прежнее значение функции отбора газа, $p_{\text{атм}}$ — давление на поверхности, $p_0 = \text{const}$ — начальное давление.

2.4. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННЫХ ДВУХМЕРНЫХ РАСЧЕТОВ

Разработанные в разделах 2.1 и 2.2 алгоритмы реализованы в виде программ на ЭВМ для моделирования процесса разработки газоносных пластов системой горизонтальных скважин.

На рис. 2.2 в виде замкнутых контуров показаны изменения насыщенности и давления в пласте с двухфазным насыщением газ — вода при вскрытии пласта тремя горизонтальными скважинами, расположенными симметрично, параллельно оси y . При этом были выбраны следующие значения: размеры области $L_x = L_y = 500$ м; координаты скважин: $x_1 = 120$ м, $x_2 = 250$ м, $x_3 = 380$ м, $y_1 = 150$ м, $y_2 = 350$ м; $Q_{\text{сум},1} = Q_{\text{сум},2} = Q_{\text{сум},3} = 30$ тыс. м³/сут. Функции проницаемости имели вид (2.6), значения основных параметров составляли:

$$m = 0,3, K = 0,01 \text{ мкм}^2, s_{b,\text{max}} = s_{r,\text{max}} = 0,8, s_{b,\text{min}} = s_{r,\text{min}} = 0,2,$$

$$s_2 = 0,3, p_0 = p_1 = 15 \text{ МПа}, v = 90 \text{ г/моль}, T_{\text{пл}} = 305 \text{ К},$$

$$\rho_b = 1000 \text{ кг/м}^3, \mu_b = 1 \text{ мПа} \cdot \text{с}, \mu_r = 0,01 \text{ мПа} \cdot \text{с},$$

$$p_{\text{пл}} = 18 \text{ МПа}, Z_{\text{пл}} = 0,76; p_{\text{ср}} = 9 \text{ МПа}, Z_{\text{ср}} = 0,83.$$

На границах области задавались условия первого рода.

Параметры разностной схемы: $N_x = N_y = 50$, $\tau = 1$ сут. На рис. 2.2, *а* показаны линии уровня концентрации воды, а на рис. 2.2, *б* — линии уровня давления для момента времени $t = 80$ сут. Пунктирной линией указаны горизонтальные скважины. Значения уровней функций указаны на рис. 2.2 в виде столбца чисел справа от самих линий уровня. Значения водонасыщенности и давления изменяются в данный момент времени от минимальных во внутренних точках пласта (в силу симметрии расположения скважин) до максимальных (на границе пласта, благодаря краевым условиям первого рода). Из рис. 2.2 видно, что, как и в одномерном случае, изменение насыщенности s_w в области происходит в виде волны с крутым фронтом, движущейся к центру.

2.5. ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧИ ОДНОФАЗНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ

Приведем основные уравнения однофазной фильтрации газа в горизонтальном пласте с учетом непостоянной по пространству толщины пласта $h(x, y)$:

$$\partial(m \rho_r s_r h) / \partial t + \operatorname{div}(u_r \rho_r h) + q_r = 0, \quad (2.18)$$

$$u_r = -K \cdot [k_r(s_w) / \mu_r] \operatorname{grad} p, \quad (2.19)$$

$$s_w + s_r = 1, \quad s_w = s_{\min} = \text{const}. \quad (2.20)$$

Предполагается, что пористость и абсолютная проницаемость в точках пласта не являются постоянными и заданы в виде функций $m = m(x, y)$, $K = K(x, y)$.

Уравнения (2.18) — (2.20) совместно с уравнениями (2.2) и (2.3) решаются в области $(x, y) \in (0, L_x) \cdot (0, L_y)$.

Рассматриваются два варианта граничных условий:

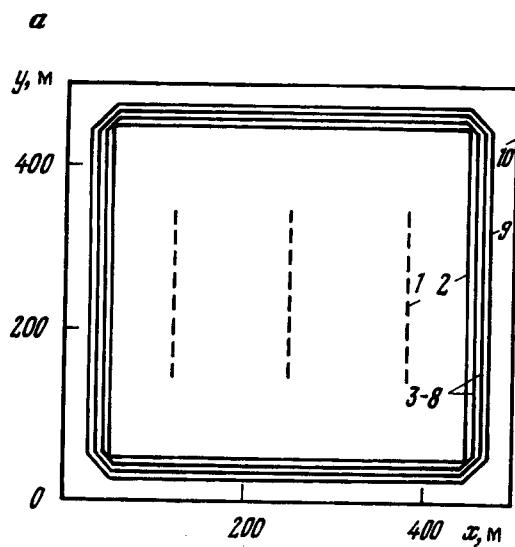
1) либо условия 1-го рода (условия Дирихле):

$$p(x, y, t)|_{\partial G} = p_1(t),$$

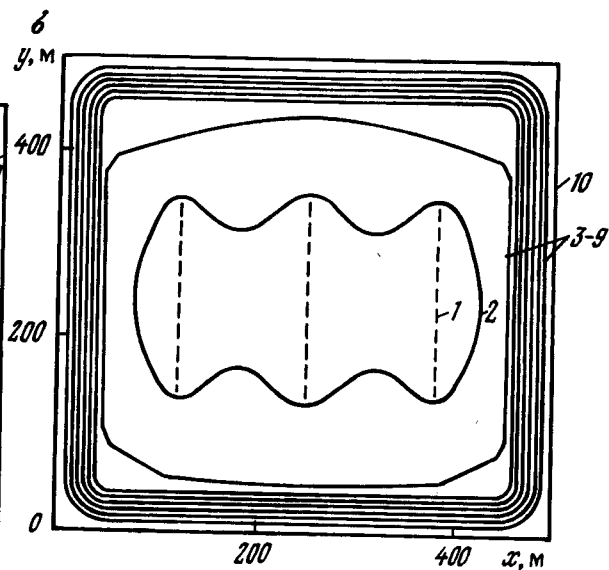
где $p_1(t) = p_0 - \Delta \cdot t$, $p_0, p_1, \Delta = \text{const}$;

2) либо условия 2-го рода (условия Неймана, соответствующие непроницаемым границам области):

$$\frac{\partial p}{\partial n}|_{\partial G} = 0.$$



Номер линии	s_6	Номер линии	s_6
1	0,30	6	0,58
2	0,36	7	0,63
3	0,41	8	0,69
4	0,47	9	0,74
5	0,52	10	0,80



Номер линии	$p, \cdot 10^2 \text{ кПа}$	Номер линии	$p, \cdot 10^2 \text{ кПа}$
1	24,91	6	94,41
2	38,81	7	108,30
3	52,71	8	122,20
4	66,61	9	136,10
5	80,51	10	150,00

Начальные условия:

$$p(x, y, t=0) = p_0.$$

При расчетах для моделирования ситуации с непостоянными величинами h , m , K будем, во-первых, считать, что толщина пласта в рассматриваемой прямоугольной области изменяется по параболическому закону в сечении любой плоскостью, параллельной координатным осям, достигая своего минимального значения $H_{\min}$ на границах области и максимального значения $H_{\max}$ в ее центре:

$$h(x, y) = H_{\min} + (H_{\max} - H_{\min}) \cdot x \cdot y \cdot (L_x - x) \cdot (L_y - y) \cdot 4 / (L_x L_y).$$

Во-вторых, будем полагать, что в рассматриваемой области содержится прямоугольная подобласть ($x_1 < x < x_2$), ($y_1 < y < y_2$), в которой $m = m_2$, $K = K_2$ (вне этой подобласти $m = m_1$, $K = K_1$), $m_{1,2}$, $K_{1,2} = \text{const}$.

Решение уравнений (2.18) — (2.20) аналогично описанному выше решению уравнений (2.1) — (2.3) при постоянном значении концентрации воды ($s = s_{\min}$) с учетом непостоянства функций h , m , K . Так же, как и при двухфазной фильтрации, в рассматриваемой области введем разностную сетку по пространству и времени, в узлах которой будем рассматривать функции давления. Разностная схема, аппроксимирующая уравнения (2.18) — (2.20), на такой сетке будет иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} <mh> (1 - s_{\min}) p_t [d\rho/dp]^{(0,5)} + <q_r> = \\ = [A_{i+1/2,j}^x \rho_{r,i+1/2,j}(\hat{p}) \hat{p}_x]_{\hat{x}} - [A_{i,j+1/2}^y \rho_{r,i,j+1/2}(\hat{p}) \hat{p}_y]_{\hat{y}}, \end{aligned} \quad (2.21)$$

где

$$\rho_{r,i+1/2,j} = (\rho_{r,i+1,j} + \rho_{r,i,j})/2; \quad \rho_{r,i,j} = \rho_r(p(x_i, y_j));$$

$$\rho_{r,i,j+1/2} = (\rho_{r,i,j+1} + \rho_{r,i,j})/2;$$

$$<mh> = V^{-1} \int_V mh \, dV; \quad <q_r> = V^{-1} \int_V q_r \, dV;$$

Рис. 2.2. Изолинии насыщенности воды s_w (а) и давления p (б) через 80 сут с начала разработки пласта размером 500×500 м, разрабатываемого тремя горизонтальными скважинами (указаны пунктиром) с дебитом по 30 тыс. м³/сут газа каждая

$$A_{i+1/2,j}^x = \frac{1}{y(j+1/2)-y(j-1/2)} \int_{y(j-1/2)}^{y(j+1/2)} \left[\frac{1}{x(i+1)-x(i)} \int_{x(i)}^{x(i+1)} \frac{dx}{\theta(x,y)} \right]^{-1} dy;$$

$$A_{i,j+1/2}^y = \frac{1}{x(i+1/2)-x(i-1/2)} \int_{x(i-1/2)}^{x(i+1/2)} \left[\frac{1}{y(j+1)-y(j)} \int_{y(j)}^{y(j+1)} \frac{dy}{\theta(x,y)} \right]^{-1} dx;$$

$$\theta(x, y) = K(x, y) \cdot h(x, y) \cdot k_r(s_{\min})/\mu_r,$$

$x(i) = x_i, y(j) = y_j$ — узлы разностной сетки,

$$x(i+1/2) = (x_i + x_{i+1})/2, y(j+1/2) = (y_j + y_{j+1})/2.$$

Для определения значений давления на верхнем слое по времени из уравнения (2.21), как и выше, используется подпрограмма ORTOM2.

2.6. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ОДНОФАЗНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ

Исследование математической модели однофазной фильтрации выполнено для газонасыщенного пласта размером 500×500 м при наличии одной горизонтальной эксплуатационной скважины с координатами $x_1 = x_2 = 250$ м, $y_1 = 100$ м, $y_2 = 400$ м и дебитом $Q_{\text{сум}} = 50$ тыс. м³/сут.

Функции проницаемости были заданы в виде соотношения (2.6). Значения основных параметров составляли:

$$m_1 = 0,3, K_1 = 0,01 \text{ мкм}^2, m_2 = m_1/4, K_2 = K_1/4,$$

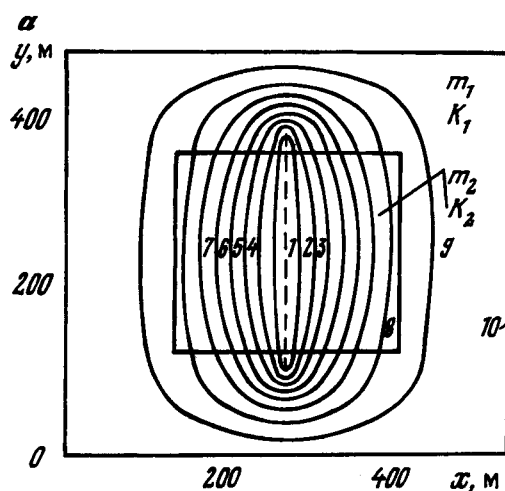
$$s_{r,\max} = 0,8, s_{r,\min} = 0,2, H_{\min} = 1 \text{ м}, H_{\max} = 5 \text{ м},$$

$$p_0 = p_1 = 15 \text{ МПа}, \mu = 0,01 \text{ мПа} \cdot \text{с},$$

$$p_{\text{пл}} = 18 \text{ МПа}, Z_{\text{пл}} = 0,76; p_{\text{ср}} = 9 \text{ МПа}, Z_{\text{ср}} = 0,83;$$

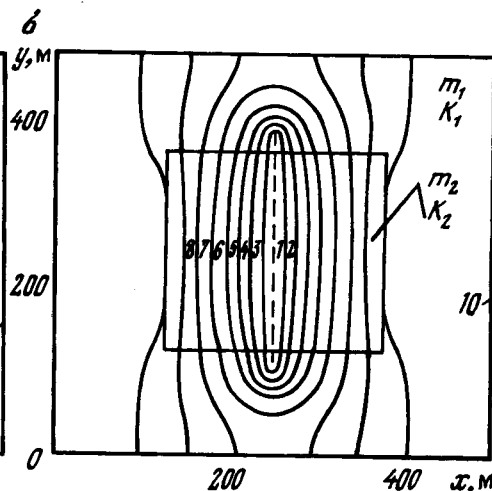
$$v = 90 \text{ г/моль}, T_{\text{пл}} = 305 \text{ К}.$$

В центре области находится прямоугольная подобласть с координатами $x_1 = 125$ м, $x_2 = 375$ м, $y_1 = 125$ м, $y_2 = 375$ м, в которой значения пористости и абсолютной проницаемости в 4 раза меньше, чем в остальной области.



Номер линии	$p, 10^2 \text{ кПа}$
1	140,54
2	141,59
3	142,64
4	143,69
5	144,74

Номер линии	$p, 10^2 \text{ кПа}$
6	145,80
7	146,85
8	147,90
9	148,95
10	150,00



Номер линии	$p, 10^2 \text{ кПа}$
1	134,01
2	135,17
3	136,33
4	137,48
5	138,64

Номер линии	$p, 10^2 \text{ кПа}$
6	139,80
7	140,96
8	142,12
9	143,28
10	144,44

Рис. 2.3. Линии уровня давления на момент времени $t=10$ сут с начала разработки неоднородного пласта размером 500×500 м.

Пористость и проницаемость внутренней прямоугольной области $m_2=m_1/4$, $K_2=K_1/4$, вне прямоугольной области $m_1=0,3$, $K_1=0,01 \text{ мкм}^2$. Пласт разрабатывается горизонтальной скважиной (пунктирная линия) длиной 300 м. Краевые условия на внешней границе области: а—первого рода; б—второго рода; 1—10 — линии уровня давления

Были просчитаны два варианта задачи, отвечающие заданию на границах области двух типов граничных условий: первого и второго рода.

На рис. 2.3, *а* показаны линии уровня давления для момента времени $t = 10$ сут, отвечающие граничному условию первого рода. На рис. 2.3, *б* представлены аналогичные результаты, соответствующие краевому условию второго рода. Пунктирной линией на графиках показаны горизонтальные скважины. Выделен также прямоугольник в центре области с пониженными значениями пористости и абсолютной проницаемости. Из рис. 2.3 видно, что вдоль оси скважины максимальные градиенты давления наблюдаются в районе ее устья и окончания, где максимальны значения интенсивности отбора газа с единицы длины ствола скважины. Кроме того, область высокого градиента давления локализована в зоне низкопроницаемой части пласта, что обусловлено необходимостью реализовать вклад в заданный суммарный дебит скважины из областей с низкой проницаемостью. Если бы весь горизонтальный ствол скважины был расположен в зоне с низкой проницаемостью, то для поддержания того же самого суммарного дебита давление в скважине необходимо было бы установить на значительно более низком уровне ($\approx 10,8$ МПа), причем область градиента давления будет в основном вся локализована в этой же низкопроницаемой зоне.

На рис. 2.4 приведены кривые распределения притока газа $q(x)$ на единицу длины горизонтального ствола скважины в $\text{м}^3/(\text{сут} \cdot \text{м})$ при суммарном дебите 100 тыс. $\text{м}^3/\text{сут}$ ствола длиной 600 м. Скважина проходит вдоль средней линии, параллельной оси x в прямоугольном газонасыщенном пласте с размерами $L_x = 1200$ м, $L_y = 700$ м. Кривая 1 относится к однородному пласту с пористостью $m = 0,155$ и проницаемостью $K = 0,145$ мкм²; кривая 2 — к неоднородному пласту, правая половина которого (где лежит правая половина ствола) имеет проницаемость $K \sim 0,110$ мкм², а левая — $K \sim 0,06$ мкм². Эти кривые отражают характерный концевой эффект при работе горизонтального ствола скважины — многократное увеличение притока флюида к окрестностям в окончании и устье скважины по сравнению с притоком к внутренним участкам ствола скважины.

На рис. 2.5 приведено распределение давления в неоднородном газонасыщенном пласте размером 2000×2000 м при

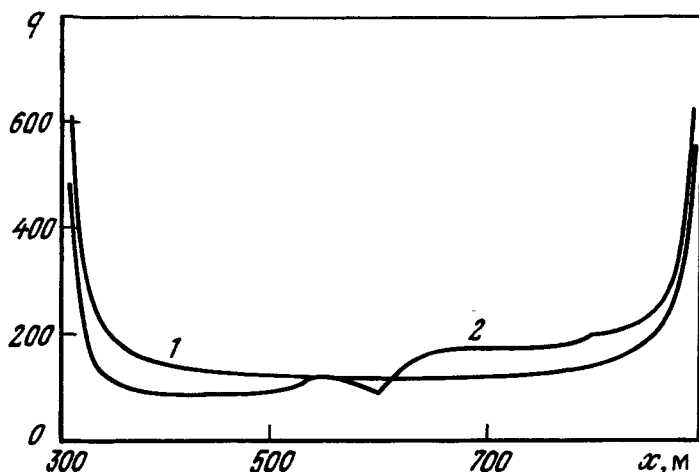


Рис. 2.4. Концевой эффект функции притока газа $q(x)$ к единице длины ствола при работе горизонтальной скважины конечной длины

наличии трех эксплуатационных скважин (обозначенных пунктиром), расположенных параллельно оси y на прямых $x_1 = 500$ м, $x_2 = 1000$ м, $x_3 = 1500$ м, длина скважин 400 м (координаты по оси y начальных точек скважин $y_n = 800$ м, конечных точек — $y_k = 1200$ м). Дебит каждой скважины $Q = 100$ тыс. $\text{м}^3/\text{сут}$. В левой нижней части области находится прямоугольная подобласть размером 750×600 м, в которой значения пористости и абсолютной проницаемости в 10 раз меньше, чем в основной области. Пористость и проницаемость основной области равны соответственно $m_1 = 0,15516$, $K_1 = 0,145$ мкм^2 . На внешней границе пласта задано постоянное давление $p = 15$ МПа (условие Дирихле). Стационарный режим фильтрации устанавливается примерно через 10 сут с момента пуска скважин. Значение давления при этом режиме в стволе каждой скважины зависит только от ее дебита и, как видно из рис. 2.5, практически не изменяется вдоль ствола скважины. Однако градиент давления в окрестности каждой скважины существенно зависит от взаимного расположения скважин (интерференция скважин) и наличия неоднородностей в пласте. Явление интерференции проявляется и в том, что давление в разных скважинах устанавливается равным одному и тому же значению, зависящему только от дебита.

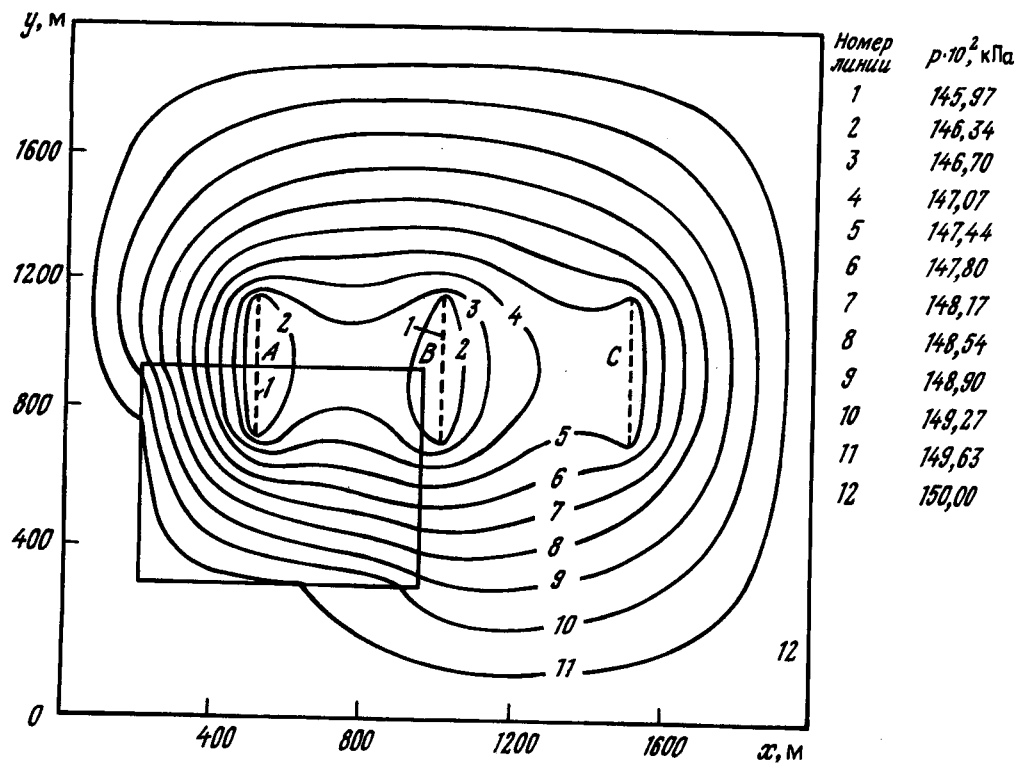


Рис. 2.5. Изолинии давления $p(x, y)$ через 15 сут с начала разработки неоднородного пласта размером 2000×2000 м. Пунктиром показаны горизонтальные скважины A, B, C с $Q_{A, B, C} = 100$ тыс. $\text{м}^3/\text{сут}$; 1—12—линии уровня давления

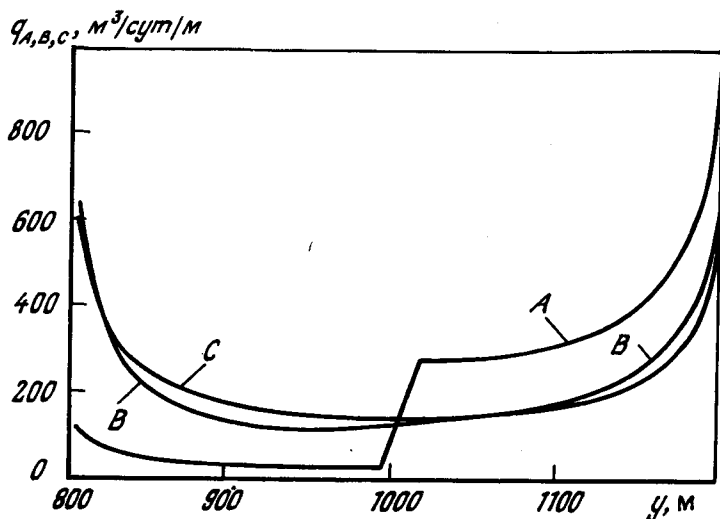


Рис. 2.6. Функции притока газа $q(y)$ к горизонтальным скважинам, показанным на рис. 2.5.

A , B , C — скважины, находящиеся на прямых $x_A = 500$ м, $x_B = 1000$ м, $x_C = 1500$ м соответственно

На рис. 2.6 приведены отвечающие полю давления на рис. 2.5 кривые распределения притока газа $q(y)$ (в $\text{м}^3/\text{сут}/\text{м}$) на единицу длины горизонтального ствола скважины при дебите каждой скважины $Q = 100$ тыс. $\text{м}^3/\text{сут}$. Кривая A соответствует скважине, первая половина которой находится в низкопроницаемой части пласта, что приводит к пропорциональному уменьшению притока флюида к этой части ствола. Интересно отметить, что кривая B , соответствующая скважине, близко расположенной к границе неоднородности, незначительно отличается от кривой C для скважины, проходящей вдали от неоднородности.

Анализ характера всех трех кривых позволяет выявить важное свойство при работе горизонтальных участков стволов скважин — концевой эффект — многократное увеличение притока флюида к окрестностям точек начала и окончания горизонтального участка по сравнению с притоком к точкам в средней части стволов скважин. Эти эффекты неравномерного притока флюида как в однородных, так и в неоднородных пластах необходимо учитывать при обустройстве горизонтальных скважин.

2.7. АНАЛИТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ ПРИТОКА ФЛЮИДА К ГОРИЗОНТАЛЬНЫМ СКВАЖИНАМ

Рассмотрим плоское движение флюида в пористых средах. При этом предположим, что векторы поля параллельны некоторой плоскости (x, y) , причем во всех точках любой прямой, перпендикулярной к (x, y) , векторы поля равны по величине и направлению. Говоря о точке плоского поля, мы будем иметь в виду бесконечную прямую плоскопараллельного поля, перпендикулярную к (x, y) и проходящую через эту точку, кривая будет означать цилиндрическую поверхность, а область — цилиндрическое тело.

Рассмотрим сначала задачу о притоке флюида к одиночной горизонтальной скважине конечной длины $L_{\text{скв}}$, расположенной в однородном, бесконечно протяженном пласте толщиной h . Предположим, что на границе области G заданы условия смешанного типа — на части границы ∂G_1 задано постоянное давление p_k : $p|_{\partial G_1} = p_k$, а на другой части ∂G_2 границы задано условие непроницаемости: $u_n|_{\partial G_2} = 0$, означающее отсутствие потока флюида в направлении нормали к границе ∂G_2 .

Если граничные условия первого рода не зависят от времени, то существует стационарный режим фильтрации, устанавливающийся через некоторое характерное время

$$t_s = m s R^2 \mu / (k P),$$

где R — характерный размер пространственной области; P — характерное значение давления.

В рассмотренных ниже задачах область G , как правило, не является ограниченной. Горизонтальную скважину представим в виде узкой цилиндрической щели, сечение которой плоскостью xu представляет собой отрезок прямой линии $L_{\text{в}}$. Давление на скважине будем считать постоянным вдоль скважины и равным p_k :

$$p|_{L_{\text{в}}} = p_{\text{скв}}.$$

Рассмотрим теперь приток флюида q к единице длины горизонтальной скважины, состоящий из притоков через обе поверхности щелевидной скважины, обозначаемых формально «+» и «-»:

$$q(x, y) = q_-(x, y) + q_+(x, y), \quad q_{\pm} = \rho u_{\pm} = -\frac{k}{\mu} \rho \frac{\partial p}{\partial n_{\pm}}, \quad (x, y) \in L_{\text{в}},$$

где $n_{\pm}$ ($n_{+} = -n_{-}$) означает две противоположные единичные нормали к линии L_c . Если отрезок L_c принадлежит контуру ∂G области G , то вектор $\vec{n}_{+} = \vec{n}$, где $\vec{n}$ — направление вектора внешней нормали к ∂G , при этом вектор с компонентами dx/ds , dy/ds является единичным вектором $\vec{s}$, касательным к контуру ∂G . Положительное направление интегрирования по контуру ∂G совпадает с вектором $\vec{s}$ и определяется из условия, что при обходе контура область G остается слева. Определим теперь суммарный приток флюида к горизонтальной скважине:

$$Q = h \int_{L_c} q \, ds.$$

Значение Q зависит от давления p_k на контуре области и p_c на скважине.

При стационарном режиме будет справедливо следующее уравнение для давления p :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\rho \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\rho \frac{\partial p}{\partial y} \right) = 0. \quad (2.22)$$

Вводя вместо давления потенциальную функцию Φ :

$$\Phi(p) = \int \rho(p) \, dp,$$

получим уравнение Лапласа

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0, \quad (x, y) \in G. \quad (2.23)$$

Решение $\Phi(x, y)$ должно удовлетворять смешанным краевым условиям на контуре $\partial G = \partial G_1 \cup \partial G_2$:

$$\Phi|_{L_b} = \Phi(p_c) = \Phi_c = \text{const}, \quad \Phi|_{\partial G_1} = \Phi(p_k) = \Phi_k = \text{const},$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} |_{\partial G_2} = 0.$$

Решение данной задачи ищем в виде комплексного потенциала векторного поля:

$$W(x + i \cdot y) = W(z) = \Phi(x, y) + i \cdot \Psi(x, y), \quad z = x + iy,$$

где $W(z)$ — регулярная в области $G \cup \partial G$ функция; $\Psi(x, y)$ — функция тока (см., например [10, 11, 15, 18]).

Функция $W(z)$ является конформным отображением исходной области движения $G \cup \partial G$ в комплексной плоскости z на некоторую область комплексного потенциала в плоскости W .

При этом участки границы области ∂G_1 и L_c переходят соответственно в отрезки прямых $\Phi = \Phi_k$ и $\Phi = \Phi_c$ на плоскости W . Участок границы ∂G_2 соответствует набору из N отрезков прямых вида $\Psi = \Psi_\beta = \text{const}$ (число N констант Ψ_β , $\beta = 1, 2, \dots, N$ определяется геометрией области и конкретным видом граничных условий).

Для построения конформного отображения введем параметрическую комплексную переменную $\zeta = \xi + i\eta$ [13]. На первый координатный угол плоскости ζ будем отображать две области: область движения, заданную на плоскости $z = x + iy$, и область комплексного потенциала $W = \Phi + i\Psi$. Имея два таких отображения $\zeta = f_1(z)$ и $\zeta = f_2(W)$, получим необходимое конформное отображение области движения z на область комплексного потенциала $W = \Phi + i\Psi$ в виде $f_1(z) = f_2(W)$; в неявной форме

$$f(z, W) = f_1(z) - f_2(W) = 0,$$

что позволяет найти все элементы течения флюида. Например, для скорости фильтрации в произвольной точке области движения применяем формулу

$$q_x(x, y) - iq_y(x, y) = -\frac{k}{\mu} \frac{dW}{dz} = \frac{k}{\mu} \frac{\partial f / \partial z}{\partial f / \partial W}. \quad (2.24)$$

Вектор скорости фильтрации в произвольной точке области G равен

$$\vec{q} = (q_x, q_y) = -\frac{k}{\mu} \text{grad } \Phi = -\left(\frac{k \partial \Phi}{\mu \partial x}, \frac{k \partial \Phi}{\mu \partial y} \right) = -\left(\frac{k \partial \Psi}{\mu \partial y}, -\frac{k \partial \Psi}{\mu \partial x} \right).$$

Количество флюида, протекающее через произвольную незамкнутую ориентированную гладкую кривую с началом в точке z_1 и с концом в точке z_2 , равно

$$\begin{aligned} Q &= h \int_{z_1}^{z_2} (\vec{q} \vec{n}) ds = -\frac{kh}{\mu} \int_{z_1}^{z_2} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y} s_y + \frac{\partial \Psi}{\partial x} s_x \right) ds = \\ &= -\frac{kh}{\mu} \int_{z_1}^{z_2} \frac{\partial \Psi}{\partial s} ds = -\frac{kh}{\mu} (\Psi(z_2) - \Psi(z_1)), \end{aligned} \quad (2.25)$$

где $\vec{s} = (s_x, s_y)$ — единичный вектор касательной к кривой; $\vec{n}$ — вектор нормали к кривой с левой ее стороны на правую (по движению вдоль кривой по направлению $\vec{s}$).

Следовательно, разность значений функции тока в точках z_1 и z_2 определяет количество жидкости, протекающей в сторону $\vec{n}$ в единицу времени через цилиндрическую поверхность с единичной высотой, имеющую в качестве направляющей некоторую кривую в плоскости xu , соединяющую точки z_1 и z_2 .

Исследуем движение флюида в однородных коллекторах для различных вариантов расположения горизонтальных скважин, границ пространственной области, а также задания на них граничных условий.

ГОРИЗОНТАЛЬНАЯ СКВАЖИНА В НЕОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ

Рассмотрим горизонтальную скважину длиной 2λ , расположенную на оси x так, что середина скважины совпадает с началом координат на плоскости xu :

$$L_b = \{-\lambda < x < \lambda, y = 0\}.$$

Предположим, что скважина находится в неограниченном пласте на плоскости xu , заданы давление на скважине p_c и значение суммарного притока Q флюида к ней.

В силу симметрии задачи достаточно рассмотреть движение в первой четверти комплексной плоскости $\text{Re } z > 0, \text{Im } z > 0$ с выброшенным отрезком $0 < x < \lambda$ действительной оси (рис. 2.7, а).

При этом на участках границы $AD = \{x = 0, y > 0\}$ и $BC = \{x > \lambda, y = 0\}$ задается условие непроницаемости (симметрии), тогда как на участке границы AB , соответствующем половине горизонтальной скважины, задано значение потенциала Φ_c . Условия непроницаемости, как отмечалось выше, соответствуют заданию постоянных значений функции тока Ψ . Принимая во внимание выражение (2.25), можно считать, что на участке границы BC значение $\Psi = 0$, тогда как на участке границы AD значение $\Psi = \Psi_1 = Q/(4kh/\mu)$, где Q — полный дебит данной горизонтальной скважины.

Для решения задачи требуется найти конформное отображение полуполосы комплексной плоскости

$$W^* = \frac{\pi/2}{\Psi_1} (W - \Phi_c)$$

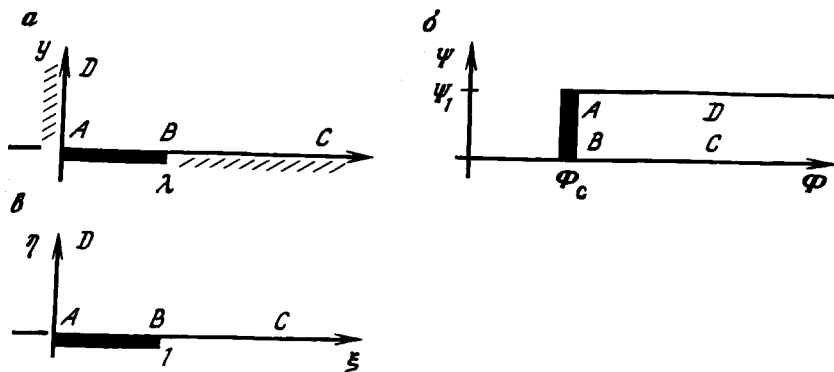


Рис. 2.7. Области конформных отображений:

a — движения G на плоскости z ; *б* — комплексного потенциала на плоскости W ; *в* — на параметрической плоскости $\zeta = \xi + i\eta$

на первый координатный угол плоскости ζ так, чтобы полу-
прямая AD (рис. 2.7, *б*) на плоскости $W^* \{\Phi^* > 0, \Psi^* = \pi/2\}$
перешла в полупрямую $\{\xi = 0, \eta > 0\}$ на плоскости
 ζ (рис. 2.7, *в*); а отрезок $AB \{\Phi^* = 0, 0 \leq \Psi^* \leq \pi/2\}$, соответ-
ствующий половине горизонтальной скважины, перешел в от-
резок $\{0 < \xi < 1, \eta = 0\}$; полупрямая $BC \{\Phi^* > 0, \Psi^* = 0\}$ перешла
в полупрямую $\{\xi > 1, \eta = 0\}$ на плоскости ζ .

Необходимое конформное преобразование имеет вид

$$\zeta = f_2(W) = \operatorname{ch} W^*.$$

Конформное преобразование области движения z на плос-
кость параметрической комплексной переменной ζ является
преобразованием подобия:

$$\zeta = f_1(z) = z/\lambda.$$

Решение в явной форме, соответствующее основным ис-
ходным параметрам задачи фильтрации Φ_c , Q , имеет сле-
дующий вид:

$$W(z) = \frac{Q\mu}{2\pi kh} \operatorname{arch}(z/\lambda) + \Phi_c, \quad (2.26)$$

Кривые семейства $\Phi(x, y) = \operatorname{const} > \Phi_c$ на комплексной плоско-
сти z (эквипотенциальные линии) являются эллипсами вида

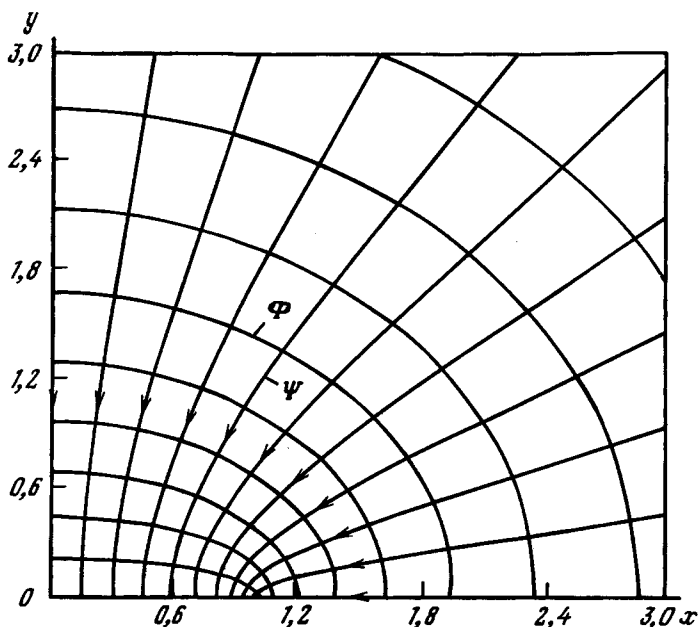


Рис. 2.8. Изолинии функций потенциала скоростей (давления) $\Phi(x, y)$ и тока $\Psi(x, y)$ для одиночной скважины.

На линиях Ψ стрелки указывают направление потока флюида к горизонтальной скважине

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1, \quad \alpha = \lambda \operatorname{ch} \frac{\Phi - \Phi_c}{A_1}, \quad \beta = \lambda \operatorname{sh} \frac{\Phi - \Phi_c}{A_1}, \quad A_1 = \frac{Q\mu}{2\pi kh}, \quad (2.27)$$

$$\text{так как } x = \lambda \operatorname{ch} \frac{\Phi - \Phi_c}{A_1} \cos \frac{\Psi}{A_1}, \quad y = \lambda \operatorname{sh} \frac{\Phi - \Phi_c}{A_1} \sin \frac{\Psi}{A_1}.$$

Значению $\Phi = \Phi_c$ соответствует отрезок эквипотенциальной линии $-\lambda < x < \lambda, y = 0$, совпадающий с горизонтальной скважиной.

Кривые семейства $\Psi(x, y) = \text{const}$ на комплексной плоскости z (линии тока) являются софокусными гиперболами вида

$$\frac{x^2}{\alpha_0^2} - \frac{y^2}{\beta_0^2} = 1, \quad \alpha_0 = \lambda \cos \frac{\Psi}{A_1}, \quad \beta_0 = \lambda \sin \frac{\Psi}{A_1}.$$

На рис. 2.8 приведено семейство линий $\Phi = \text{const}, \Psi = \text{const}$ в рассматриваемой области движения $\{x > 0, y > 0\}$.

2.8. КОНЦЕВОЙ ЭФФЕКТ ПРИ РАБОТЕ ГОРИЗОНТАЛЬНЫХ СКВАЖИН

Применяя формулы (2.24) и (2.26), определим комплексную скорость фильтрации в произвольной точке x, y пласта:

$$q_x(x, y) - iq_y(x, y) = -\frac{kdW}{\mu dz} = \frac{iQ}{2\lambda\pi h\sqrt{1-z^2/\lambda^2}}.$$

В точках скважины $z=x$, где $-\lambda \leq x \leq \lambda$, полный приток массы флюида на единицу длины горизонтальной скважины в силу симметрии течения равен сумме предельных значений притоков с двух противоположных сторон скважины:

$$q_y(x) = q_{y|y=+\lambda} + q_{y|y=-\lambda} = \frac{Q}{\lambda\pi h\sqrt{1-x^2/\lambda^2}}. \quad (2.28)$$

Из формулы (2.28) следует, что функция удельного притока симметрична относительно середины горизонтальной скважины: $q_y(x) = q_y(-x)$; причем при приближении к концам скважины приток неограниченно возрастает: $q_y(x) \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow \pm \lambda$, т. е. наблюдается характерный концевой эффект при работе горизонтального ствола скважины. Вблизи скважины эквипотенциальные линии — эллипсы с фокусами в точках $\pm \lambda$ (см. рис. 2.8). Линии тока сгущаются к концам скважины из-за увеличения скорости фильтрации в окрестности концов скважины (концевой эффект). Вдали от скважины, на расстояниях от ее середины $r > 2\lambda$, схемы течения к горизонтальному стволу и стока к нулевой точке практически совпадают, при этом эквипотенциальные линии совпадают с окружностями, а линии тока — с лучами из нулевой точки.

Вводя понятие среднего притока к горизонтальной скважине $\bar{q} = Q/2\lambda$, из формулы (2.28) находим, что его минимальное значение расположено в середине горизонтального участка скважины и равно

$$q_{\min} = \frac{2}{\pi} \bar{q} \approx 0,64 \bar{q}.$$

Физический смысл концевого эффекта заключается в различном характере притока флюида к точкам в начале и окончании горизонтального ствола скважины по сравнению с притоком в точках средней части ствола. Приток флюида к кон-

цевым точкам горизонтального ствола имеет радиальный характер с логарифмической функцией распределения давления, к средним же точкам распределение давления близко к линейному (как для бесконечно длинной горизонтальной скважины) (см. рис. 2.8).

Решение (2.26) может быть получено путем прямого построения функции комплексного потенциала течения, которое основано на применении конформного отображения внешности отрезка $[-\lambda, \lambda]$ оси x комплексной плоскости $z = x + iy$ на внешность единичного круга $|\zeta| > 1$ плоскости $\zeta = \xi + i\eta$:

$$z = \frac{\lambda}{2} (\zeta + 1/\zeta). \quad (2.29)$$

Решив задачу о притоке флюида к кругу единичного радиуса на плоскости ζ и выполнив затем обратный переход к переменной z , получим функцию комплексного потенциала $W(z)$. Выражение для комплексной скорости фильтрации на плоскости ζ в силу радиальной симметрии течения имеет вид

$$q_\xi + iq_\eta = -\frac{Q\zeta}{2\pi h|\zeta|^2} = -\frac{Q}{2\pi h\bar{\zeta}}.$$

Принимая во внимание выражение (2.24), запишем уравнение для определения потенциала $W(\zeta)$:

$$\frac{Q}{2\pi\zeta h} = \frac{k}{\mu} \frac{dW}{d\zeta}.$$

Его решением, удовлетворяющим на контуре единичного круга условию $W_0 = \Phi_c$, является функция

$$W(\zeta) = \frac{Q\mu}{2\pi kh} \ln(\zeta) + \Phi_c.$$

Подставляя вместо аргумента ζ ветвь обратной к (2.29) функции, которая осуществляет отображение внешности отрезка $[-\lambda, \lambda]$ на внешность единичного круга, получаем окончательно:

$$W(z) = \frac{Q\mu}{2\pi kh} \ln(z/\lambda + \sqrt{z^2/\lambda^2 - 1}) + \Phi_c = \frac{Q\mu}{2\pi kh} \operatorname{arch}(z/\lambda) + \Phi_c.$$

Последнее выражение совпадает с решением (2.26), полученным иным методом.

Формула (2.26) является также решением следующей задачи: пусть горизонтальная скважина находится на отрезке $[-\lambda, \lambda]$ оси x в центре области с внешней границей в форме эллипса с размерами полуосей a и b ($a^2 = b^2 + \lambda^2$) по координатам x и y , причем значения потенциала на скважине (Φ_c) и на внешней границе (Φ_k) постоянны. Согласно формуле (2.27) имеет соотношение:

$$\frac{Q\mu}{2\pi kh} \operatorname{arsh}(b/\lambda) = \Phi_k - \Phi_c, \quad (2.30)$$

из которого следует, что при постановке задачи требуется задать любую пару величин из трех: Q , Φ_c и Φ_k (например, значения Q и Φ_k , или Q и Φ_c , или Φ_c и Φ_k).

При $b \gg \lambda$ указанные эллипсы, очевидно, переходят в окружности радиуса b , а формула (2.30) переходит в соотношение

$$\frac{Q\mu}{2\pi kh} \ln(2b/\lambda) = \Phi_k - \Phi_c.$$

Таким образом, на больших расстояниях от горизонтальной скважины характер течения флюида совпадает с радиальным — стоком в точке $z=0$ интенсивности Q .

2.9. ПРИТОК К СИСТЕМАМ ГОРИЗОНТАЛЬНЫХ СКВАЖИН

БАТАРЕЯ ГОРИЗОНТАЛЬНЫХ СКВАЖИН

Рассмотрим приток флюида к системе (батарее) бесконечного числа горизонтальных скважин одинаковой длины 2λ , расположенных эквидистантно на оси y и направленных параллельно оси x (рис. 2.9). Ось y проходит через середины всех скважин, расстояние между ними $\Delta y = H$.

В силу симметрии все пространство разбивается для каждой из скважин на бесконечно протяженные вдоль оси x полосы с одинаковым течением (рис. 2.9, а). В свою очередь, в качестве области движения G достаточно выбрать только четверть каждой такой полосы: $\operatorname{Re} z > 0$, $0 < \operatorname{Im} z < H/2$ с выброшенным отрезком $0 < x < \lambda$ действительной оси.

При этом на участках границы (рис. 2.9, а) $AE = \{x=0, 0 < y < H/2\}$, $ED = \{x > 0, y = H/2\}$ и $BC = \{x > \lambda, y=0\}$ задано

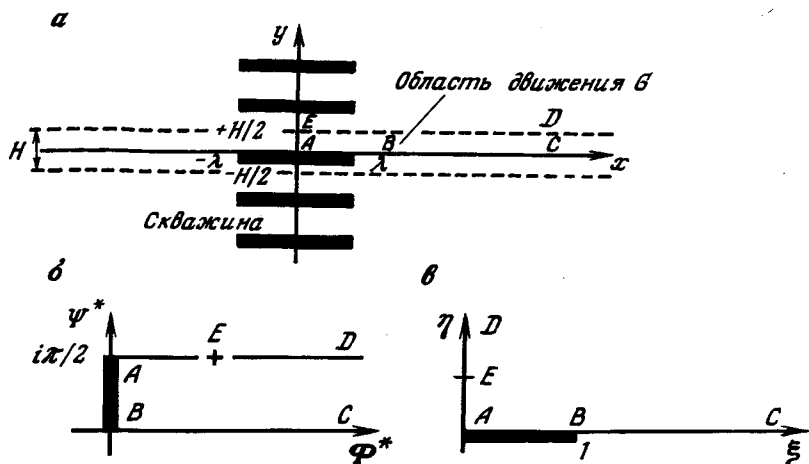


Рис. 2.9. Области конформных отображений:

a — системы параллельных (батарей) скважин; $б$ — комплексного потенциала W^* ; $в$ — параметрической плоскости ζ

условие непроницаемости (симметрии), на участке границы AB , соответствующем половине горизонтальной скважины, задано значение потенциала Φ_c . На основании выражения (2.25), как и в рассмотренной выше задаче, можно считать, что на участке границы BC значение функции тока $\Psi = 0$, тогда как на участках границы AE и ED $\Psi = \Psi_1 = Q\mu/(4kh)$, где Q полный дебит данной горизонтальной скважины.

Поскольку область комплексного потенциала на плоскости W аналогична области рассмотренного выше режима притока флюида к одиночной скважине, то конформное отображение на параметрическую плоскость ζ остается прежним:

$$\zeta = f_2(W) = \text{ch } W^*, \quad W^* = \frac{\pi/2}{\Psi_1} (W - \Phi_c).$$

Конформное преобразование области движения G (рис. 2.9, a) на первый координатный угол плоскости ζ (рис. 2.9, $в$), отвечающее принципу соответствия границ, получаем в результате суперпозиции трех преобразований: 1 — преобразования подобия $z' = \frac{\pi}{2} \frac{z}{H/2} = \pi z/H$, 2 — конформного отображения $\zeta' = \text{sh } z'$,

3 — преобразования подобия $\zeta = \zeta' / \text{sh} [\pi \lambda / H]$. В результате имеем

$$\zeta = f_1(z) = \frac{\text{sh} [\pi z / H]}{\text{sh} [\pi \lambda / H]}.$$

Из этих выражений следует, что решение задачи о притоке флюида к данной конфигурации параллельных скважин можно записать в явной форме:

$$W(z) = A_1 \text{arch} \left[\frac{\text{sh} [\pi z / H]}{\text{sh} [\pi \lambda / H]} \right] + \Phi_c, \quad A_1 = \frac{Q\mu}{2\pi kh}. \quad (2.31)$$

Отметим, что при $H \rightarrow \infty$ эта формула переходит в формулу (2.26).

Комплексную скорость фильтрации в произвольной точке x, y пласта получим, применив формулу (2.24) к функции $f(z, W) = f_1(z) - f_2(W)$:

$$q_x - iq_y = -\frac{k}{\mu} \frac{dW}{dz} = -\frac{k}{\mu} \frac{\partial f_1 / \partial z}{\partial f_2 / \partial W} = \frac{Q}{2Hh} \frac{i \text{ch} (\pi z / H)}{\sqrt{\text{sh}^2 (\pi \lambda / H) - \text{sh}^2 (\pi z / H)}}.$$

В точках скважины $z = x$, где $-\lambda \leq x \leq \lambda$, полный приток массы флюида на единицу длины горизонтальной скважины в силу симметрии течения равен сумме предельных значений притоков с двух противоположных сторон скважины:

$$q_y(x) = |q_y|_{y=+0} + q_{y|y=-0} = \frac{Q}{Hh} \frac{\text{ch} (\pi x / H)}{\sqrt{\text{sh}^2 (\pi \lambda / H) - \text{sh}^2 (\pi x / H)}}. \quad (2.32)$$

Из выражения (2.32) следует, что функция удельного притока, как и в случае работы одиночной горизонтальной скважины в бесконечно протяженном пласте, симметрична относительно середины горизонтальной скважины: $q(x) = q(-x)$; причем при приближении к началу ($x = -\lambda$) или окончанию ($x = \lambda$) горизонтального участка скважины эта функция неограниченно возрастает: $q(x) \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow \pm \lambda$.

На рис. 2.10 приведено семейство линий $\Phi = \text{const}$, $\Psi = \text{const}$ в рассматриваемой области $G = \{x > 0, 0 < y < H/2\}$. Вблизи скважины линии уровня потенциала похожи по форме на эллипсы, а при удалении по оси x от скважины эти линии приближаются к вертикальным отрезкам прямых линий, соединяющим противоположные стенки канала (см. пунктирные линии на рис. 2.9, а). В точках канала, удаленных от скважины

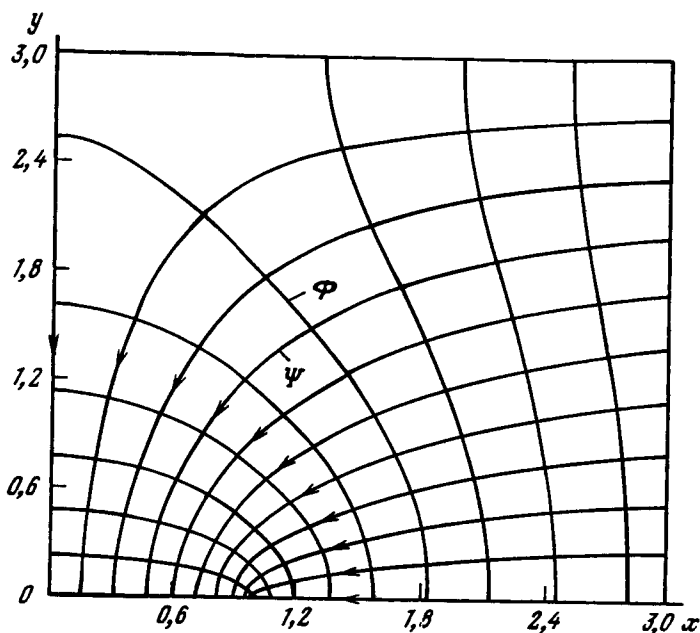


Рис. 2.10. Изолинии функций потенциала скоростей (давления) $\Phi(x, y)$ и тока $\Psi(x, y)$ для 1/2 горизонтального участка ствола в батарее скважин. На линиях Ψ стрелки указывают направление потока флюида к горизонтальной скважине

и определяемых условием $x \gg \max(\lambda, H/\pi)$, решение Φ , очевидно, зависит только от координаты x .

Решение (2.31) также дает описание притока флюида к одиночной горизонтальной скважине, проходящей параллельно оси x вдоль средней линии полособразного пласта, бесконечно протяженного по оси x и имеющего ширину $\Delta y = H$. Рассмотрим область движения G , ограниченную прямоугольником:

$$G = \{-B/2 < x < B/2, -H/2 < y < H/2\}, \quad B \gg 2 \max(\lambda, H/\pi).$$

Координаты скважины:

$$L_c = \{-\lambda < x < \lambda, y = 0\}.$$

На границах области, параллельных скважине (т. е. линиях $|y| = H/2$), задано условие непроницаемости, а на границах области, перпендикулярных к скважине (т. е. линиях

$|x| = B/2$ — условие Дирихле: $\Phi|_{x=\pm B/2} = \Phi_k$, причем справедливо соотношение

$$\Phi_k = \frac{Q}{2} \frac{\mu}{\pi k h} \operatorname{arch} \left\{ \frac{\operatorname{sh}[\pi B/(2H)]}{\operatorname{sh}(\pi \lambda/H)} \right\} + \Phi_c.$$

Полученное решение применяют для выбора оптимальной длины горизонтального участка скважины в полосообразном пласте.

ЦЕПОЧКА ГОРИЗОНТАЛЬНЫХ СКВАЖИН

Определим функцию комплексного потенциала и характеристики движения для эквидистантного линейного расположения (цепочки) скважин в бесконечно протяженном пласте (рис. 2.11).

Принимая во внимание симметрию течения, в качестве области движения выбираем полубесконечную полосу G , ограниченную прямой AE , являющейся линией тока, относительно которой течение симметрично. На этой линии AE задано постоянное значение функции тока $\Psi = \Psi_1 = Q\mu/(4kh)$, где Q — полный дебит данной горизонтальной скважины, H — ширина полосы притока флюида к горизонтальной скважине.

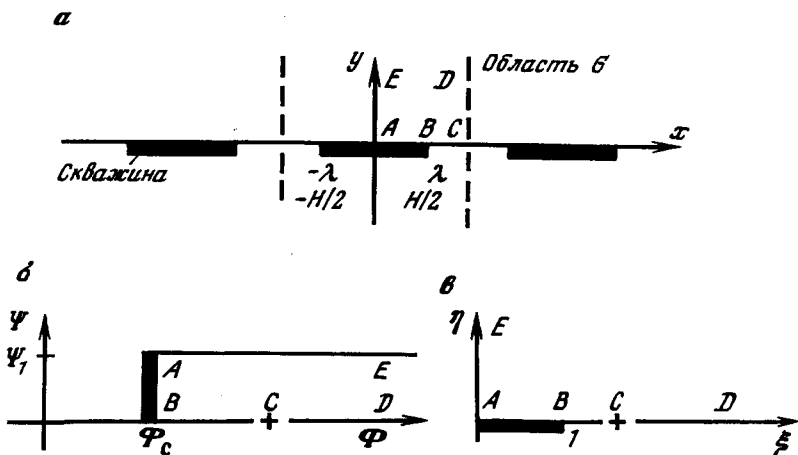


Рис. 2.11. Области конформных отображений:

a — системы линейно расположенных (цепочки) скважин; b — комплексного потенциала W ; c — на параметрической плоскости ζ

На участке границы AB , соответствующем половине горизонтальной скважины, задано постоянное значение потенциала Φ_c , на ломаной BCD на основании выражения (2.25), как и в рассмотренной выше задаче, значение функции тока $\Psi = 0$.

Поскольку область комплексного потенциала на плоскости W аналогична области рассмотренного выше режима притока флюида к одиночной скважине, то конформное отображение на параметрическую плоскость ζ остается прежним:

$$\zeta = f_2(W) = \operatorname{ch} W^*, \quad W^* = \frac{\pi/2}{\Psi_1} (W - \Phi_c).$$

Конформное преобразование области движения G (рис. 2.11, a) на первый координатный угол плоскости ζ (рис. 2.11, e), отвечающее принципу соответствия границ, получаем в результате суперпозиции трех преобразований: 1 — преобразования подобия $z' = \pi z/H$, 2 — конформного отображения $\zeta' = \sin z'$, 3 — преобразования подобия $\zeta = \zeta' / \sin [\pi \lambda/H]$. В результате имеем:

$$\zeta = f_1(z) = \frac{\sin [\pi z/H]}{\sin [\pi \lambda/H]}.$$

Из этих выражений следует, что решение задачи о притоке флюида к данной конфигурации параллельных скважин можно записать в явной форме:

$$W(z) = A_1 \operatorname{arch} \frac{\sin [\pi z/H]}{\sin [\pi \lambda/H]} + \Phi_c, \quad A_1 = \frac{Q\mu}{2\pi kh}. \quad (2.33)$$

Комплексную скорость фильтрации в произвольной точке x, y пласта получим, применив формулу (2.24) к функции $f(z, W) = f_1(z) - f_2(W)$:

$$q_x - iq_y = -\frac{k dW}{\mu dz} = -\frac{k \partial f_1 / \partial z}{\mu \partial f_2 / \partial W} = \frac{Q}{2Hh} \frac{i \cos(\pi z/H)}{\sqrt{\sin^2(\pi \lambda/H) - \sin^2(\pi z/H)}}.$$

В точках скважины $z = x$, где $-\lambda \leq x \leq \lambda$, полный приток массы флюида на единицу длины горизонтальной скважины в силу симметрии течения равен сумме предельных значений притоков с двух противоположных сторон скважины:

$$q_y(x) = |q_y|_{y=+0} + |q_y|_{y=-0} = \frac{Q}{Hh} \frac{\cos(\pi x/H)}{\sqrt{\sin^2(\pi \lambda/H) - \sin^2(\pi x/H)}}. \quad (2.34)$$

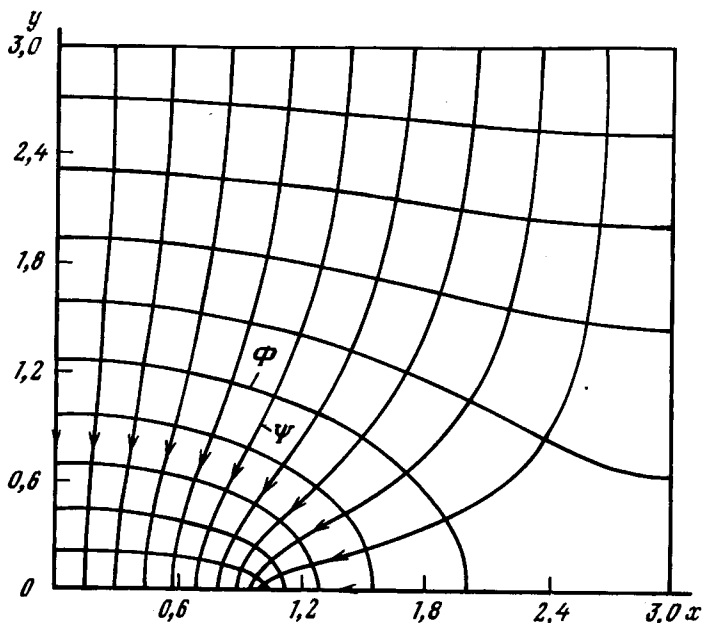


Рис. 2.12. Изолинии функций потенциала скоростей (давления) $\Phi(x, y)$ и тока $\Psi(x, y)$ для 1/2 горизонтального участка ствола в цепочке скважин. На линиях Ψ стрелки указывают направление потока флюида к горизонтальной скважине

Из (2.34) следует, что функция удельного притока, как и в случае работы одиночной горизонтальной скважины в бесконечно протяженном пласте, симметрична относительно середины горизонтальной скважины: $q(x) = q(-x)$; причем при приближении к устью или окончанию скважины эта функция неограниченно возрастает: $q(x) \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow \pm \lambda$.

На рис. 2.12 приведено семейство линий $\Phi = \text{const}$, $\Psi = \text{const}$ в рассматриваемой области $G = \{0 < x < H/2, y > 0\}$. Вблизи скважины линии уровня потенциала похожи по форме на эллипсы, а при удалении по оси y от нее эти линии приближаются к горизонтальным отрезкам прямых, соединяющих противоположные стенки канала течения (см. пунктирные линии на рис. 2.11, а). В точках канала, удаленных от скважины и определяемых условием $y \gg \max(\lambda, H/\pi)$, решение Φ , очевидно, зависит только от координаты y .

При уменьшении расстояния H между серединами двух соседних скважин в цепочке (при $H/(\pi\lambda) \sim 1$) происходит эк-

ранировка концевго эффекта, благодаря чему функция притока (2.34) становится практически однородной вдоль скважины, т. е. $q_y(x) \sim \text{const}$. В предельном случае при $\lambda = H/2$ приток к скважинам равен постоянной величине $q_y = Q/(Hh)$. Влияние экранировки приводит при $H/(\pi\lambda) \leq 1$ к значительному увеличению депрессии на пласт при разработке месторождения цепочкой скважин по сравнению с разработкой при расположении того же количества скважин по схеме батареи (при одних и тех же дебитах скважин). Отсюда следует, что при более плотном расположении стволов горизонтальных скважин схема батареи скважин (с точки зрения депрессии на пласт) более выгодна, чем цепочка скважин.

СХЕМА РАЗМЕЩЕНИЯ ГОРИЗОНТАЛЬНЫХ СТВОЛОВ В ВИДЕ ЗВЕЗДЫ. АНИЗОТРОПНЫЕ ПЛАСТЫ

Анализ процесса разработки газонефтяных месторождений системами горизонтальных скважин тесно связан с решением задач оптимизации целого ряда показателей разработки путем выбора необходимого числа скважин, схемы их размещения, длины горизонтальных стволов, дебитов каждой из скважин. При этом основными исходными данными являются размеры и конфигурации месторождений, коллекторские свойства пласта: характер распределения насыщенности флюидов, коэффициентов пористости и проницаемости, пространственная неоднородность параметров среды и др.

Одна из задач оптимизации процесса разработки месторождений заключается в определении минимального числа горизонтальных стволов, их длины и схемы расположения на данном газонефтяном месторождении для достижения заданного суммарного дебита месторождения при условии обеспечения допустимой величины депрессии на пласт (и, следовательно, обеспечения наивысшей газо- (нефте) отдачи пласта и надежности эксплуатации скважин).

В данном разделе предложены аналитические методы решения задач теории однофазной фильтрации в изотропных и анизотропных пластах при наличии системы горизонтальных скважин. Предлагаемые методы позволяют анализировать

и рассчитывать режимы работы системы горизонтальных скважин на различных этапах разработки месторождения, детально исследовать распределение давления в пластах и характер притока флюида к горизонтальным стволам скважин в неоднородных пластах.

ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧИ (ИЗОТРОПНЫЕ И АНИЗОТРОПНЫЕ СРЕДЫ)

Примером анизотропной среды может служить пласт, состоящий из чередования горизонтальных тонких прослоев с различной проницаемостью. В этом случае простейшей моделью однородно-анизотропной среды является пласт, в котором главные оси анизотропии совпадают с горизонтальным направлением x и вертикальным y ; составляющие скорости фильтрации вдоль этих направлений

$$q_x = -\frac{k_x}{\mu} \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad q_y = -\frac{k_y}{\mu} \frac{\partial \Phi}{\partial y},$$

где k_x, k_y — коэффициенты проницаемости вдоль горизонтального и вертикального направлений. Уравнение неразрывности

$$\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} = 0$$

приводит к уравнению для Φ :

$$k_x \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0, \quad (x, y) \in G,$$

которое после замены переменных:

$$\tilde{x} = x / \sqrt{k_x}, \quad \tilde{y} = y / \sqrt{k_y},$$

перейдет в уравнение Лапласа

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \tilde{y}^2} = 0.$$

Отсюда видно, что методы теории конформных преобразований для решения плоских задач фильтрации могут быть применены для анизотропных пластов.

Количество флюида, протекающее через произвольную незамкнутую ориентированную гладкую кривую с началом в точке z_1 и с концом в точке z_2 в анизотропном пласте, равно

$$\begin{aligned}
Q &= h \int_{z_1}^{z_2} (\vec{q} \vec{n}) ds = h \int_{z_1}^{z_2} q_x dy - q_y dx = -\frac{h}{\mu} \sqrt{k_x k_y} \int_{\tilde{z}_1}^{\tilde{z}_2} \frac{\partial \Phi}{\partial \tilde{x}} d\tilde{y} - \frac{\partial \Phi}{\partial \tilde{y}} d\tilde{x} = \\
&= -\frac{h}{\mu} \sqrt{k_x k_y} \int_{\tilde{z}_1}^{\tilde{z}_2} \frac{\partial \Psi}{\partial \tilde{y}} d\tilde{y} + \frac{\partial \Psi}{\partial \tilde{x}} d\tilde{x} = -\frac{h}{\mu} \sqrt{k_x k_y} \int_{\tilde{z}_1}^{\tilde{z}_2} \frac{\partial \Psi}{\partial s} ds = \\
&= -\frac{h}{\mu} \sqrt{k_x k_y} (\Psi(\tilde{z}_2) - \Psi(\tilde{z}_1)), \tag{2.35}
\end{aligned}$$

где $\vec{n}$ — вектор нормали к кривой с левой ее стороны на правую (по движению вдоль кривой по направлению $\vec{s}$).

Следовательно, разность значений функции тока в точках $\tilde{z}_1$ и $\tilde{z}_2$ на плоскости $(\tilde{x}, \tilde{y})$ определяет количество жидкости, протекающей в сторону $\vec{n}$ в единицу времени через цилиндрическую поверхность с единичной высотой, имеющую в качестве направляющей некоторую кривую в плоскости (xy) , соединяющую точки z_1 и z_2 .

Формула (2.35) справедлива также и для изотропного пласта при условии, что $k_x = k_y = k$.

Принимая во внимание, что на плоскости $(\tilde{x}, \tilde{y})$ потенциалы Φ, Ψ удовлетворяют уравнению Лапласа, а также то, что в результате преобразования $\tilde{x} = x/\sqrt{k_x}$, $\tilde{y} = y/\sqrt{k_y}$ сохраняют свои направления прямолинейные границы области движения, параллельные координатам x и y , получаем возможность использовать все решения для изотропного пласта. В этих последних решениях пространственные переменные x, y необходимо заменить на $\tilde{x}, \tilde{y}$, причем для функции тока $\Psi(\tilde{z})$ в формулировке граничных условий применяется выражение (2.35).

Исследуем сначала движения флюида в однородных изотропных коллекторах для расположения горизонтальных скважин в форме звезды.

Рассмотрим в изотропном пласте куст скважин из N одинаковых горизонтальных стволов длиной λ с общим вертикальным стволом (общим устьем) в центре; концы стволов располагаются в вершинах правильного N -угольника. Предположим, что задано значение суммарного притока Q_{sum} флюида к кусту скважин, давление во всех стволах одно и то же и равно p_c . В силу симметрии задачи достаточно рассмотреть область

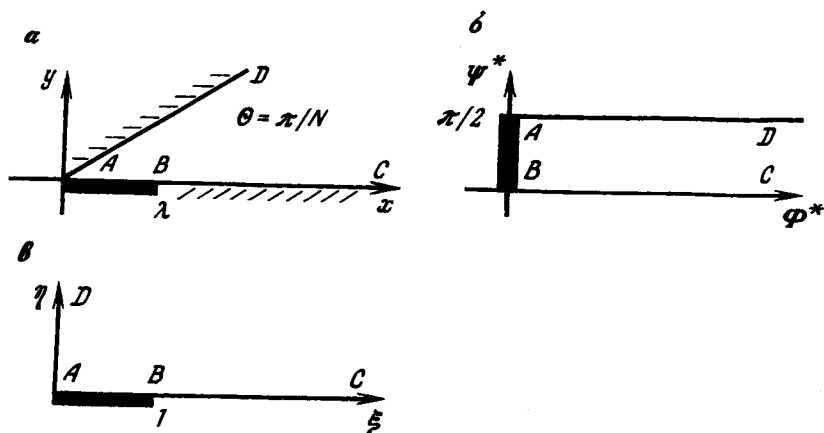


Рис. 2.13. Области конформных отображений:

a — область движения G на плоскости z ; b — область комплексного потенциала на плоскости $W^* = \frac{\pi/2}{\Psi_1} (W - \Phi_c)$; c — область отображения на параметрической плоскости $\zeta = \xi + i\eta$

на комплексной плоскости z , образуемую двумя лучами, исходящими из начала координат с углом между лучами $\theta = \pi/N$. Один из лучей проходит вдоль линии симметрии течения (непроницаемой границы), а второй луч в начальной своей части соответствует одной из горизонтальных скважин: $L_c = \{0 < x < \lambda, y = 0\}$, а на остальной части луча заданы условия непроницаемости (рис. 2.13).

При этом на участках границы AD и BC задается условие непроницаемости, а на участке границы AB , соответствующем горизонтальной скважине, задано значение потенциала Φ_c . Условия непроницаемости, как это следует из формулы (2.35), соответствуют заданию постоянных значений функции тока Ψ . Не ограничивая общности, можно считать, что на участке границы BC значение $\Psi = 0$, тогда как на участке границы AD значение $\Psi = \Psi_1 = Q_{\text{sum}} / (2Nkh/\mu)$.

Для решения задачи требуется найти конформное отображение полуполосы комплексной плоскости

$$W^* = \frac{\pi/2}{\Psi_1} (W - \Phi_c)$$

на первый координатный угол плоскости ζ так, чтобы полупрямая AD на плоскости $W^* \{ \Phi^* > 0, \Psi^* = \pi/2 \}$ перешла в полупрямую $\{ \xi = 0, \eta > 0 \}$ на плоскости ζ ; отрезок $AB \{ \Phi^* = 0, 0 \leq \Psi^* \leq \pi/2 \}$, соответствующий половине горизонтальной скважины перешел в отрезок $\{ 0 < \xi < 1, \eta = 0 \}$; полупрямая $BC \{ \Phi^* > 0, \Psi^* = 0 \}$ перешла в полупрямую $\{ \xi > 1, \eta = 0 \}$ на плоскости ζ [10].

Необходимое конформное преобразование имеет вид:

$$\zeta = f_2(W) = \text{ch } W^*.$$

Конформное преобразование области движения z на плоскость параметрической комплексной переменной ζ является суперпозицией преобразования подобия $\zeta' = z/\lambda$ и отображения

$$\zeta = f_1(z) = (z/\lambda)^\gamma, \text{ где } \gamma = \frac{\pi/2}{\theta} = N/2.$$

Решение в явной форме, соответствующее основным исходным параметрам задачи фильтрации Φ_c , Q_{sum} , имеет следующий вид:

$$W(z) = \frac{Q_{\text{sum}} \mu}{\pi N k h} \text{arch} \left[\left(\frac{z}{\lambda} \right)^{N/2} \right] + \Phi_c.$$

При $N=2$ эта формула переходит в формулу (2.26), соответствующую случаю одной горизонтальной скважины, находящейся в неограниченном пространстве.

На рис. 2.14—2.17 приведены семейства линий уровня потенциала $\Phi = \text{const}$ и линий уровня функции тока течения флюида $\Psi = \text{const}$ на плоскости (x, y) в окрестности центра куста скважин соответственно для случаев $N=2, 3, 4, 6$. На расстояниях $r_c > \lambda$ от центра куста скважин линии уровня потенциала превращаются в окружности — все семейство скважин на значительном удалении работает как одна вертикальная скважина с эффективным радиусом r_c . Кроме того, с увеличением числа стволов в схеме расположения скважин по звезде происходит сгущение линий тока к окончаниям скважин и, следовательно, основной приток флюида происходит именно к этим участкам скважин (концевой эффект).

Пусть на значительном удалении r от центра ($r \gg \lambda$) задан контур питания с давлением $p_x = \text{const}$. Нетрудно видеть, что справедливо соотношение

$$\frac{Q_{\text{sum}} \mu}{\pi N k h} \ln [2 (r/\lambda)^{N/2}] = \Phi_x - \Phi_c.$$

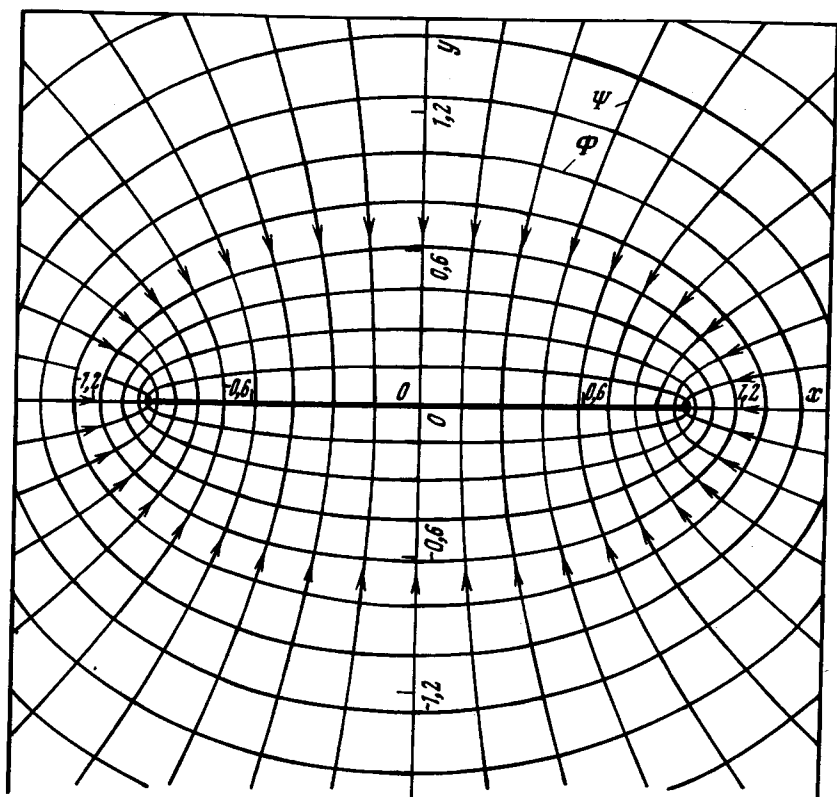


Рис. 2.14. Изолинии функций потенциала скоростей (давления) $\Phi(x, y)$ и тока $\Psi(x, y)$ для разветвленно-горизонтальной скважины с числом стволов $N=2$. На линиях Ψ стрелки указывают направление потока флюида к горизонтальному стволу

Отсюда следует, что на достаточно большом удалении от центра куста скважин характер течения флюида становится радиальным.

Найдем удельный приток флюида к горизонтальному участку скважины. Согласно формуле (2.24) имеем:

$$q_x(x, y) - iq_y(x, y) = -\frac{k}{\mu} \frac{dW}{dz} = i \frac{Q_{\text{sum}} (z/\lambda)^{0.5N-1}}{2\pi\lambda h \sqrt{1-(z/\lambda)^N}}.$$

Отсюда приток к горизонтальному участку ствола ($0 < x < \lambda$)

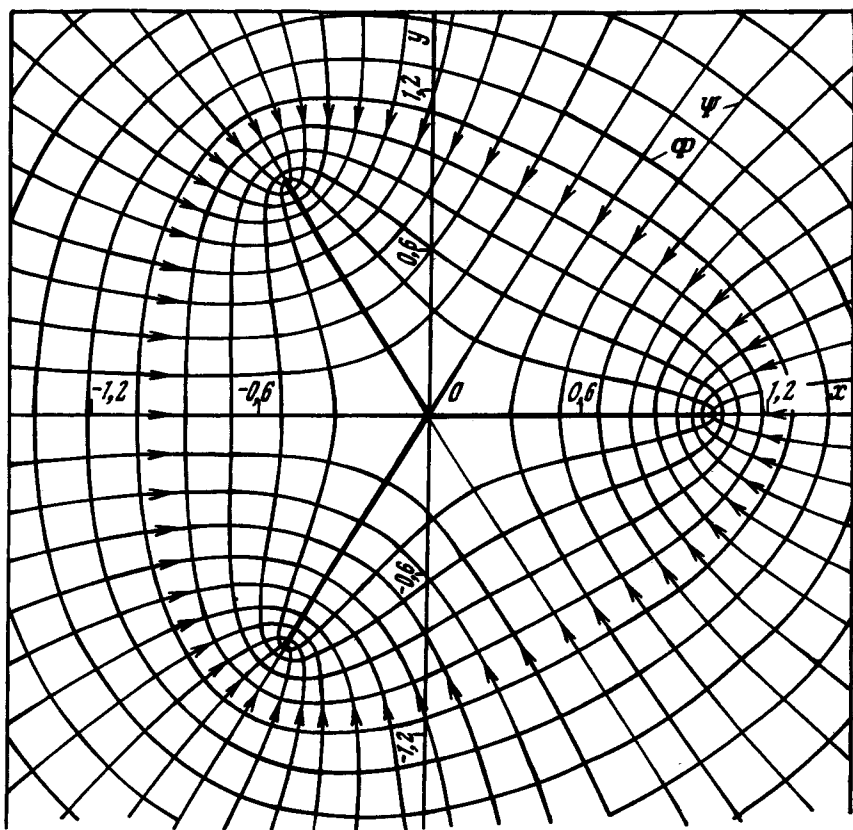
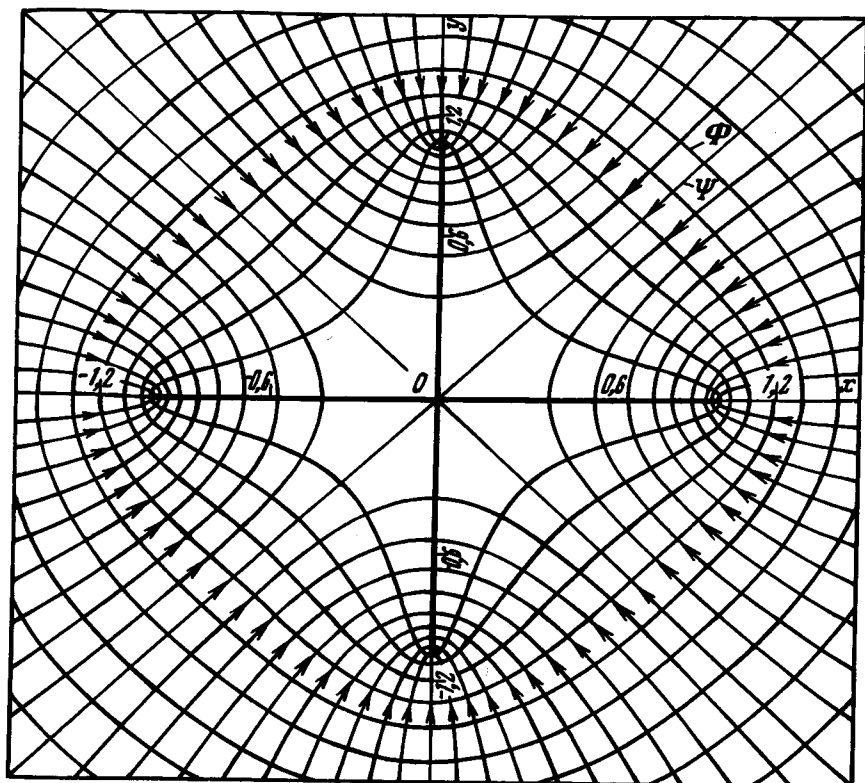


Рис. 2.15. Изолинии функций потенциала скоростей (давления) $\Phi(x, y)$ и тока $\Psi(x, y)$ для разветвленно-горизонтальной скважины с числом стволов $N=3$. На линиях Ψ стрелки указывают направление потока флюида к горизонтальному стволу

$$q_y(x) = 2q_y + (x) = \frac{Q_{\text{sum}} x^{0.5N-1}}{\pi h [\lambda^N - x^N]^{1/2}} = \frac{Q_{\text{sum}}}{\pi \lambda h} \left(\frac{x}{\lambda} \right)^{\frac{N}{2}-1} \left[1 - \left(\frac{x}{\lambda} \right)^N \right]^{-1/2}$$

Из этой формулы следует, что функция удельного притока при приближении к окончанию скважины неограниченно возрастает: $q(x) \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow \lambda$. Вблизи начала скважины ($x \sim 0$) функция удельного притока $q_y(x) \approx Q_{\text{sum}} x^{0.5N-1} / (\pi \lambda^{0.5N})$. Следовательно, для числа лучей в кусте больше двух приток флюида к центру куста скважин равен нулю. Иными словами, круговая



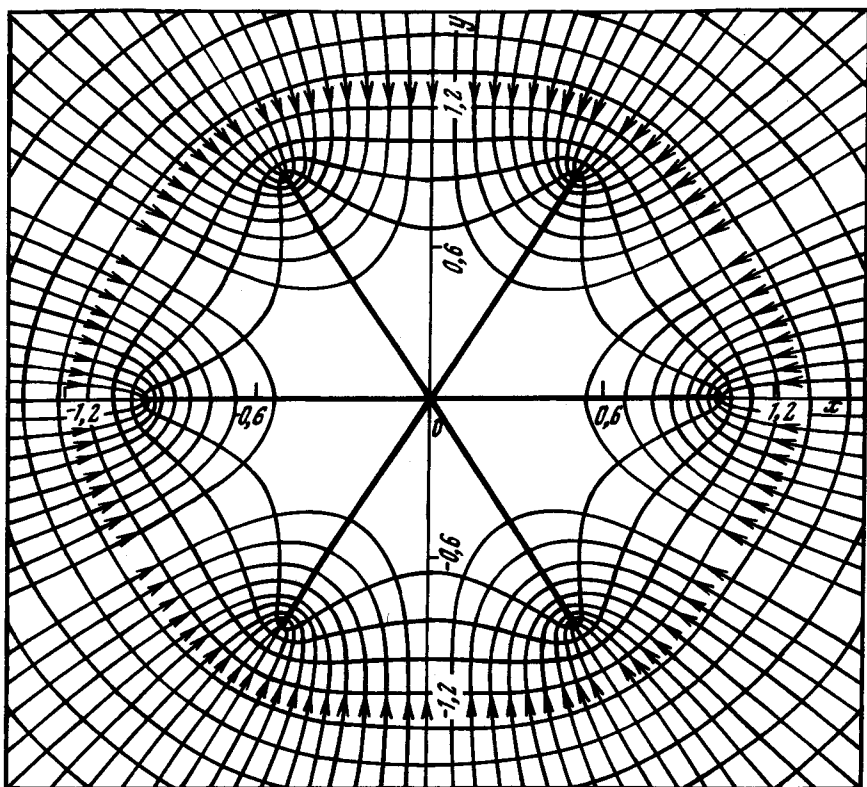


Рис. 2.17. Изолинии функций потенциала скоростей (давления) $\Phi(x, y)$ и тока $\Psi(x, y)$ для разветвленно-горизонтальной скважины с числом стволов $N=6$. На линиях Ψ стрелки указывают направление потока флюида к горизонтальному стволу

окружности радиуса α , а их концы — на окружности радиуса $\beta = \alpha + \lambda$. Заметим, что при $\alpha = 0$ имеем рассмотренный выше случай. При $N=2$ имеем ситуацию, когда две одинаковые скважины лежат на одной прямой. Будем, как и в предыдущем случае, предполагать, что семейство скважин находится в неограниченном пространстве и что заданы одинаковые давления на всех скважинах p_c , а также значение суммарного притока Q_{sum} флюида ко всем скважинам. В силу симметрии задачи достаточно рассмотреть область на комплексной плоскости z , образуемую двумя лучами, исходящими из начала координат с углом между лучами $\theta = \pi/N$. Один

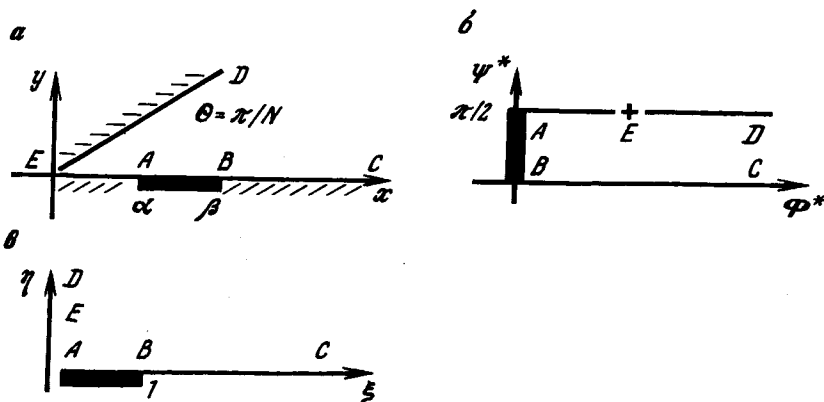


Рис. 2.18. Области конформных отображений:

a — область движения G на плоскости z ; $б$ — область комплексного потенциала W^* ; $в$ — область отображения на параметрической плоскости $\zeta = \xi + i\eta$

из лучей совпадает с линией тока (эквивалентной непроницаемой стенке), второй луч в начальной своей части содержит горизонтальную скважину: $L_c = \{\alpha < x < \lambda + \beta, y = 0\}$, а на остальной части совпадает с линией тока (рис. 2.18).

Аналогично рассмотренному выше случаю можно получить:

$$W = A_1 \operatorname{arch} \left[\left(\frac{z^N - \alpha^N}{\beta^N - \alpha^N} \right)^{1/2} \right] + \Phi_c, \quad A_1 = Q_{\text{sum}} \mu / (\pi N h k),$$

$$q_y(x) = \frac{Q_{\text{sum}}}{\pi} \frac{x^{N-1}}{[(\beta^N - x^N)(x^N - \alpha^N)]^{1/2}}.$$

Последние формулы применяют для исследования характера притока флюида в окрестности центра куста скважин.

ВЛИЯНИЕ АНИЗОТРОПИИ ПЛАСТА НА ПРИТОК ФЛЮИДА К ГОРИЗОНТАЛЬНЫМ СКВАЖИНАМ

Пусть коэффициент проницаемости является тензором:

$$k = (k_x, k_y), \quad k_x, k_y = \text{const}.$$

Как было отмечено выше, при исследовании движения флюида в анизотропном пласте замена переменных $\tilde{x} = x / \sqrt{k_x}$,

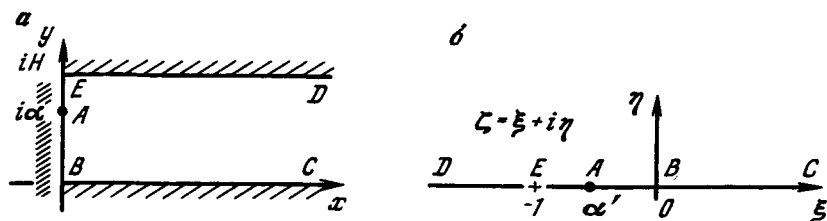


Рис. 2.19. Области конформных отображений:

a — область движения G ; b — отображение $\zeta = \text{sh}^2 \left(\frac{\pi z}{2H} \right)$

$\tilde{y} = y/\sqrt{k_y}$, позволяет применять основные результаты, полученные для изотропной среды.

Большой практический и теоретический интерес при разработке численных методов исследования дебита скважин представляют аналитические решения задач о притоке флюида к горизонтальным скважинам в анизотропных пластах конечной толщины.

Рассмотрим движение флюида в вертикальной плоскости, пересекающей перпендикулярно ось скважины и пласт конечной толщины H . На рис. 2.19, a представлена правая половина разреза пласта G , ось скважины проходит через точку A , к которой происходит приток флюида. Ломанные линии AED и ABC являются траекториями течения в области G , на первой из линий функция тока равна $\Psi_1 = q\mu/(2k)$, на второй $\Psi = 0$, где величина q равна притоку флюида к единице длины горизонтальной скважины (в силу симметрии приток к точке A из области течения G равен $q/2$).

Для решения данной задачи отобразим область движения G на верхнюю полуплоскость вспомогательной комплексной переменной ζ (рис. 2.19, b). По формуле Кристоффеля — Шварца найдем

$$z = A_0 \int_0^{\zeta} \frac{d\zeta}{\sqrt{\zeta(\zeta+1)}} = -iA_0 [\arcsin(2\zeta+1) - \pi/2].$$

Постоянную A_0 определяем согласно условию

$$-iH = A_0 \int_{-1}^0 \frac{d\zeta}{\sqrt{\zeta(\zeta+1)}} = -iA_0\pi.$$

Откуда получаем конформное преобразование области G на верхнюю полуплоскость ζ :

$$\zeta = \operatorname{sh}^2 \left(\frac{\pi z}{2H} \right). \quad (2.36)$$

Решение задачи о притоке флюида к точке A на полуплоскости ζ , как было отмечено выше, имеет вид:

$$W(\zeta) = \frac{q\mu}{2\pi k} \ln(\zeta - \alpha') + W_0, \quad (2.37)$$

где W_0 — произвольная постоянная;

$$\alpha' = -\sin^2 \frac{\pi\alpha}{2H}$$

— координата точки A (при $z = i\alpha$).

Подставляя в выражение для комплексного потенциала (2.37) вместо аргумента ζ его представление (2.36), получаем решение задачи о притоке флюида к горизонтальной скважине в пласте конечной толщины:

$$W(z) = \frac{q\mu}{2\pi k} \ln \left[\operatorname{sh}^2 \left(\frac{\pi z}{2H} \right) + \sin^2 \left(\frac{\pi\alpha}{2H} \right) \right] + W_0. \quad (2.38)$$

Из (2.38) нетрудно получить, что в малой окрестности точки $z = i\alpha$, находящейся на оси горизонтальной скважины в пласте конечной толщины, линии уровня потенциала течения $\Phi(x, y) = \operatorname{const}$ представляют собой окружности (стягивающиеся в точку при стремлении потенциала Φ к минус бесконечности). Поэтому поверхность скважины, радиус которой мал по сравнению с толщиной пласта ($r_c \ll H$), совпадает, как и должно быть, с эквипотенциальной линией, соответствующей давлению в скважине $\Phi_c = \operatorname{Re} W(i\alpha + r_c)$.

Как было отмечено выше, преобразование $\tilde{x}$, $\tilde{y}$ сохраняет вид прямоугольных областей со сторонами, параллельными координатным осям, что позволяет применить решение (2.38) (с учетом соотношения (2.35)) для анализа течения в анизотропном пласте путем простой замены комплексной

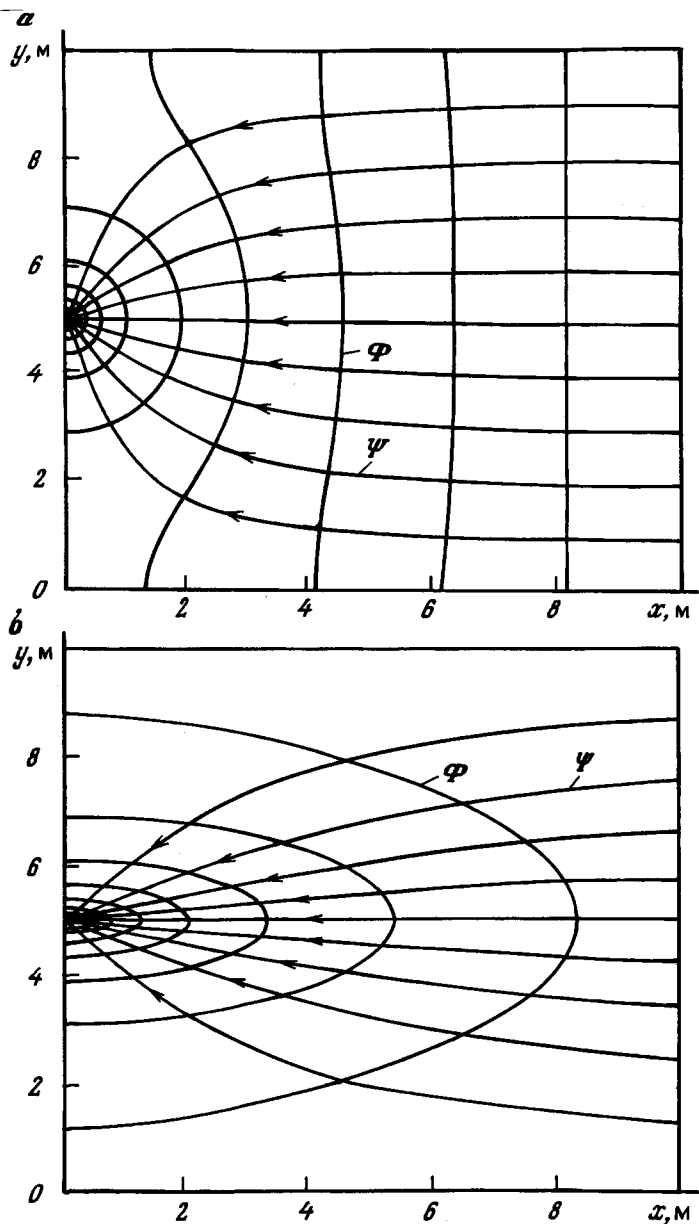


Рис. 2.20. Схема притока флюида в сечении вертикальной плоскостью, перпендикулярно пересекающей горизонтальный ствол и пласт (a —изотропный, b —анизотропный) толщиной 10 м.

Скважина равноудалена от кровли и подошвы пласта

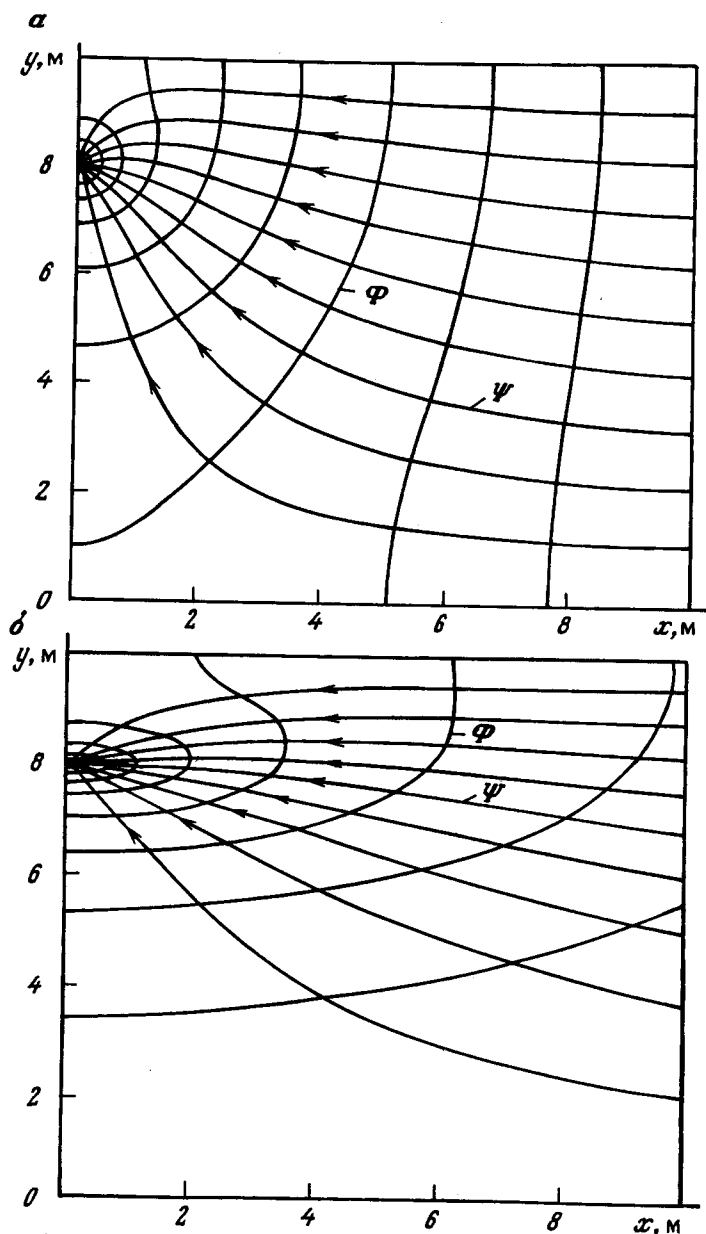


Рис. 2.21. Схема притока флюида в сечении вертикальной плоскостью, перпендикулярно пересекающей горизонтальный ствол и пласт (a — изотропный, b — анизотропный) толщиной 10 м.
Скважина проходит на расстоянии 2 м под кровлей пласта

переменной z на $\tilde{z}$. В результате получаем решение задачи о притоке флюида к горизонтальной скважине в анизотропном пласте конечной толщины:

$$W(z) = \frac{q\mu}{2\pi\sqrt{k_x k_y}} \ln \left[\operatorname{sh}^2 \left(\sqrt{k_y} \frac{\pi \tilde{z}}{2H} \right) + \sin^2 \left(\frac{\pi \alpha}{2H} \right) \right] + W_0. \quad (2.38')$$

На рис. 2.20—2.21 приведены вычисленные по формуле (2.38') эквипотенциальные линии $\Phi(x, y)$ и $\Psi(x, y)$ в вертикальной плоскости, пересекающей перпендикулярно ось скважины и пласт толщиной $H=10$ м, для разных положений горизонтальной скважины относительно толщины пласта. На рис. 2.20 горизонтальная скважина равноудалена от кровли и подошвы изотропного (а) и анизотропного (б) пластов с параметром анизотропии $\sqrt{k_y/k_x} = \sqrt{0,1}$, $k_x = 0,145$ мкм². В изотропном пласте вблизи поверхности скважины схема притока имеет однородную радиальную форму; наличие анизотропии приводит к уменьшению эффективной толщины пласта вблизи забоя горизонтальной скважины, схема притока флюида к поверхности скважины в этом случае приобретает клиновидную форму. В результате депрессия на анизотропный пласт примерно в 3 раза превосходит таковую в изотропном пласте (при равных дебитах скважин).

На рис. 2.21 показана аналогичная рис. 2.20 схема притока флюида к горизонтальной скважине, проходящей на расстоянии 2 м от кровли изотропного (2.21, а) и анизотропного (2.21, б) пластов. В обоих случаях схемы притоков и значения депрессии на пласт изменяются незначительно по сравнению с соответствующими значениями на рис. 2.20, а, б для положения скважины, равноудаленной от кровли и подошвы. Отсюда следует, что производительность горизонтальной скважины мало изменяется в зависимости от ее положения относительно кровли и подошвы пласта.

2.10. КОНТРОЛЬ ЗА РАЗРАБОТКОЙ МЕСТОРОЖДЕНИЙ НЕФТИ И ГАЗА С ПОМОЩЬЮ РАДИОПРОСВЕЧИВАНИЯ

Одними из наиболее эффективных методов исследования и контроля при бурении и эксплуатации нефтяных и газовых скважин являются методы, основанные на применении электромагнитных процессов. Анализируя электромагнитные

отклики в трансмиссионном и эхо-режимах, регистрируемые приемниками в различных скважинах, от источника в одной из этих скважин, можно решать следующие (обратные) задачи: изучение геологического строения межскважинного пространства; оценка фильтрационно-емкостных свойств коллекторов; контроль за процессом многокомпонентного движения флюида в произвольной точке пласта, а также в окрестности эксплуатационных скважин.

В разделе 2.4 показано, что при разработке газоносного пласта системой горизонтальных скважин с законтурным нагнетанием воды изменение водонасыщенности в области движения происходит в виде волны с крутым фронтом, движущейся по направлению к забоям добывающих скважин. В свою очередь, при изменении водонасыщенности происходит изменение электродинамических параметров пласта: диэлектрической проницаемости и электрической проводимости. Таким образом, применение межскважинного радиопросвечивания позволяет в принципе контролировать процесс разработки нефтяных и газовых месторождений. В настоящем разделе проведем исследование разрешающей способности межскважинного просвечивания при интенсивной добыче газа или нефти.

В главе 1 для моделирования нефтегазовых залежей был предложен метод тонких диэлектрических оболочек (МТДО) [18—20]. При этом решение прямой задачи нахождения волнового поля в межскважинном пространстве сводится к нахождению поля только на поверхности пласта (в трехмерных задачах) или на контуре поперечного сечения пласта (в двухмерных задачах).

Рассматриваются тонкие, нерегулярно залегающие пласты (как сплошные, так и прерывистые), а также отдельные включения или локализованные аномалии. Высокая эффективность алгоритма метода МТДО позволяет использовать этот алгоритм в различных геотомографических процедурах, причем, в отличие от лучевых методов радиотомографии [21], справедливых только при малых контрастах электродинамических параметров, предлагаемый метод справедлив при любых вариациях физических параметров.

1. Рассмотрим двухмерную задачу теории дифракции, геометрия которой показана на рис. 2.22.

В качестве первичного источника применяется нить электрического тока, направление которой параллельно оси z , и, следовательно, вектор электрического поля имеет лишь одну компоненту E_z .

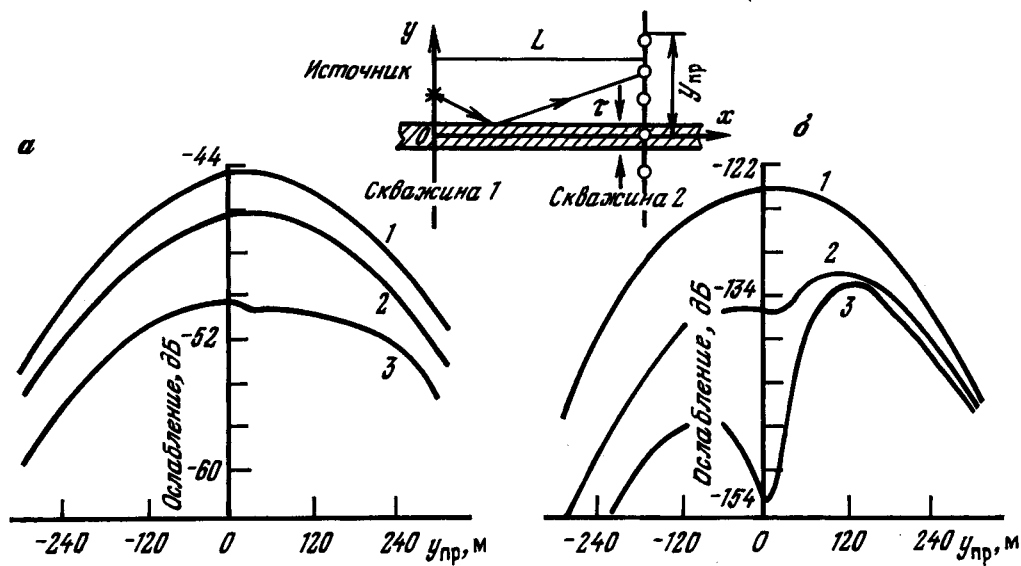


Рис. 2.22. Распределение интенсивности полного электромагнитного поля вдоль приемной скважины 2; $L = 450$ м:
 а — $f = 2$ кГц; б — $f = 20$ кГц;
 1 — при отсутствии пласта, 2 — толщина пласта $\tau = 3$ м, 3 — $\tau = 10$ м

В каждой точке q объема пласта (аномалии) падающее электромагнитное поле возбуждает токи поляризации

$$j(q) = \frac{-ik_{\text{вм}}\tau}{\eta_{\text{вм}}} \left(\frac{\epsilon_{\text{пл}}}{\epsilon_{\text{вм}}} - 1 \right) E_z^{\text{tot}}(q), \quad (2.39)$$

где $E_z^{\text{tot}}(q)$ — полное поле в объеме пласта (аномалии); $\epsilon_{\text{вм}}$ и $\epsilon_{\text{пл}}$ — комплексная диэлектрическая проницаемость вмещающих пород и пласта; $k_{\text{вм}}$ — волновое число во вмещающих породах; τ — толщина пласта;

$$\eta_{\text{вм}} = \eta_0 / \sqrt{\epsilon'_{r,\text{вм}}}; \quad \eta_0 = \sqrt{\mu_0 / \epsilon_0};$$

$$\epsilon'_{r,\text{вм}} = \epsilon_{\text{вм}} / \epsilon_0.$$

Токи поляризации $j(q)$ являются источником рассеянного поля E_z^s . Полное поле в произвольной точке p пространства горных пород является суммой падающего поля и поля, рассеянного пластом (аномалью):

$$E_z^{\text{tot}}(p) = E_z^i(p) + E_z^s(p), \quad (2.40)$$

где $E_z^i(p) = E_z^0 H_0^{(1)}(k_{\text{вм}} r_{pp_0})$ — заданное поле источника, находящегося в точке p_0 ; $H_0^{(1)}(z)$ — функция Ханкеля.

Из соотношения (2.40) следует, что для вычисления поля $E_z^{\text{tot}}(p)$ необходимо найти токи поляризации $j(q)$ или, на основании формулы (2.39), $E_z^{\text{tot}}(q)$ в точках пласта.

Неизвестное поле $E_z^{\text{tot}}(q_0)$ в точках q_0 пласта находится из решения интегрального уравнения метода МТДО:

$$E_z^{\text{tot}}(q_0) = E_z^i(q_0) + \frac{ik_{\text{вм}}^2\tau}{4} \left(\frac{\epsilon_{\text{пл}}}{\epsilon_{\text{вм}}} - 1 \right) \int_0^L E_z^{\text{tot}}(q) H_0^{(1)}(k_{\text{вм}} r_{qq_0}) dl_q, \quad (2.41)$$

где отрезок $[0, L]$ — контур поперечного сечения пласта.

После того как найдена функция $E_z^{\text{tot}}(q)$ в точках q пласта (аномалии), рассеянное поле $E_z^s(p)$ в любой точке пространства p находится согласно соотношению

$$E_z^s(p) = \frac{ik_{\text{вм}}^2\tau}{4} \left(\frac{\epsilon_{\text{пл}}}{\epsilon_{\text{вм}}} - 1 \right) \int_0^L E_z^{\text{tot}}(q) H_0^{(1)}(k_{\text{вм}} r_{pq}) dl_q,$$

где $E_z^{\text{tot}}(q)$ под знаком интеграла — решение уравнения (2.41).

2. На основе изложенного здесь метода тонких диэлектрических оболочек разработаны алгоритмы и программы для расчета на ЭВМ волновых полей в межскважинном пространстве.

Приведенные ниже данные представляют собой распределение амплитуды полного электрического поля в виде значений $20 \lg |E_z^{\text{tot}}|$ вдоль приемной скважины 2 (см. рис. 2.22) при фиксированном размещении одиночного источника в скважине 1.

На рис. 2.22 приведены результаты исследования разрешающей способности электромагнитного просвечивания для частот $f=2$ и 20 кГц при расстоянии между скважинами 450 м. Физические характеристики среды следующие: диэлектрическая проницаемость однородных вмещающих пород $\epsilon_{r,\text{вм}}=4$, удельное сопротивление $\rho_{\text{вм}}=100$ Ом·м, диэлектрическая проницаемость пласта $\epsilon_{r,\text{пл}}=1$, удельное сопротивление $\rho_{\text{пл}}=10$ Ом·м. Толщина пласта принималась равной $\tau=10$ и 3 м.

Как и следовало ожидать, кривые зондирования на частоте $f=20$ кГц имеют резко дифференцированный характер для каждого значения τ пласта, но вместе с тем и сигналы, соответствующие этим кривым, слабее сигналов для частоты $f=2$ кГц. Здесь мы сталкиваемся с известным принципом: большое ослабление сигнала является своеобразной платой за лучшее качество разрешения.

В геотомографии представляет интерес сравнение различных периодов процесса добычи нефти (газа). Результаты такого исследования приведены на рис. 2.23. Область пласта с интенсивным нефтеотбором характеризовалась относительной диэлектрической проницаемостью $\epsilon_r=20$ и удельным сопротивлением $\rho=20$ Ом·м [17]. Незатронутая часть пласта имеет параметры $\epsilon_r=7,2$, $\rho=100$ Ом·м. Область водонефтяного контакта находилась на равном расстоянии от скважин 1 и 2. Анализ результатов на рис. 2.23 позволяет получить оценку разрешающей способности электромагнитного просвечивания при изменении физических параметров пласта и выбрать необходимую частоту источника электромагнитного поля. Кроме того, здесь установлена принципиальная возможность контроля перемещения водонефтяного (газового) контакта в ходе разработки пласта.

На рис. 2.24 показано распределение поля в зависимости от положения приемника при наличии пачки горизонтальных

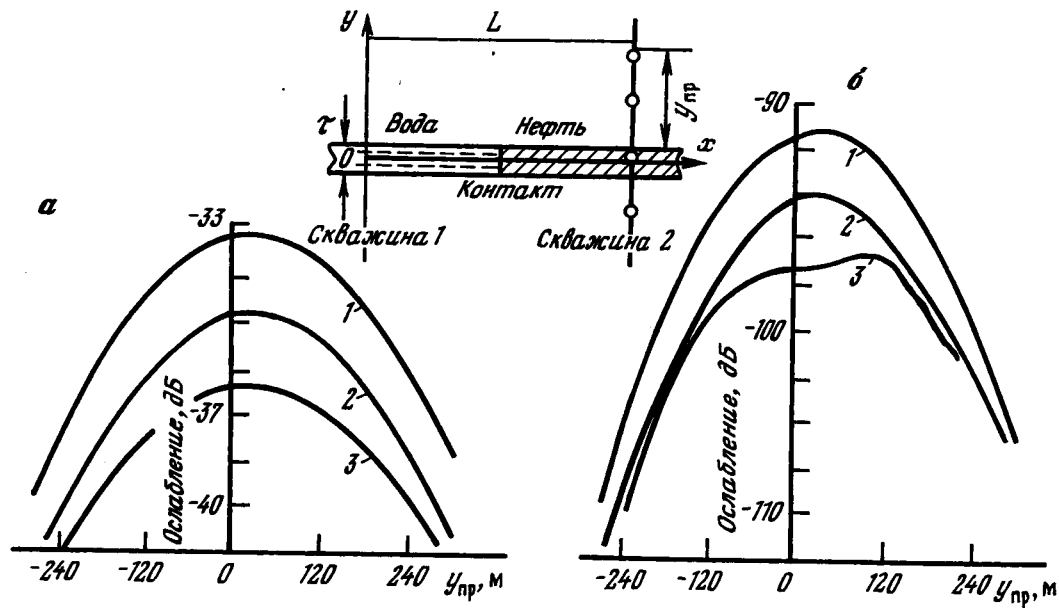


Рис. 2.23. Распределение интенсивности полного электромагнитного поля вдоль приемной скважины 2; $L = 450$ м:
 а — $f = 2$ кГц; б — $f = 20$ кГц;
 1 — нефтеносный пласт, 2 — при наличии водонефтяного контакта, 3 — полностью разработанный пласт

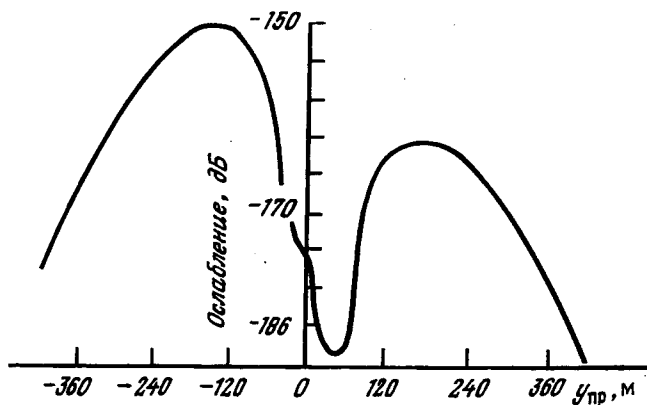


Рис. 2.24. Распределение интенсивности полного электромагнитного поля вдоль приемной скважины 2 для совокупности трех близко расположенных (по сравнению с длиной волны во вмещающих породах) один над другим пластов, $L = 450$ м

пластов толщиной $\tau = 10$ м с расстоянием между первым и вторым пластами 60 м, третий пласт отстоит от второго на 30 м. Электрические параметры трех пластов одинаковы: $\epsilon_{r,пл} = 1$, $\rho_{пл} = 10$ Ом·м. Вмещающие породы имеют параметры $\epsilon_{r,вм} = 1$, $\rho_{вм} = 100$ Ом·м. Частота поля $f = 20$ кГц, расстояние между скважинами 450 м, источник помещен в среднюю точку между первым и вторым пластами. Согласно оценке, длина волны во вмещающих породах $\lambda_{вм} = 223,6$ м, что значительно превышает расстояние между пластами. В результате данная пачка пластов благодаря суперпозиции рассеянных полей каждым пластом эквивалентна одному мощному пласту с потерями.

В заключение отметим, что межскважинное просвечивание с использованием частоты электромагнитного поля $f \approx 2—20$ кГц при удельном сопротивлении вмещающих пород $\rho \geq 10$ Ом·м является эффективным методом зондирования для расстояний между скважинами 500 м. По мере увеличения толщины одиночных пластов при $\tau \geq 3$ м возрастает разрешающая способность метода.

Метод может быть использован для построения геологического разреза по данным многочастотного радиопросвечивания и для решения проблем контроля при интенсивной разработке нефтегазоносных пластов.

ФОРМИРОВАНИЕ ЗОНЫ ПРОНИКНОВЕНИЯ В ОКРЕСТНОСТИ ВЕРТИКАЛЬНЫХ И ГОРИЗОНТАЛЬНЫХ СКВАЖИН

3.1. ОСОБЕННОСТИ ФОРМИРОВАНИЯ ЗОНЫ ПРОНИКНОВЕНИЯ

Процесс бурения большинства скважин осуществляется с применением глинистого раствора, являющегося гетерогенной полидисперсионной системой, дисперсная фаза которой — глина и частицы выбуренных горных пород, жидкая фаза — вода. В процессе бурения скважины при роторном способе происходит циркуляция глинистого раствора, который нагнетается в скважину через колонну бурильных труб, а затем поднимается по затрубному пространству к устью скважины, вынося одновременно с забоя частицы выбуренной породы. Под действием перепада давления из скважины в пласт начинает поступать фильтрат глинистого раствора, причем соответствующее количество твердой фазы раствора оседает на стенке скважины и образует плотную, низкопроницаемую корку. В общем случае ее пористость и проницаемость зависят от перепада скважинного и пластового давлений и физико-химического состава раствора.

Изучение фильтрационных процессов в лабораторных условиях позволяет проводить испытания при температурах и давлениях, соответствующих тем, которые наблюдаются в скважинах, исследовать формирование, структуру и водоотдачу фильтрационных корок, определять зависимости основных петрофизических свойств глинистых корок (пористость, проницаемость, сжимаемость) от химического и дисперсного состава раствора, от перепада давления между скважиной и пластом, от температуры пласта [16].

Проникновение фильтрата в пласт происходит через глинистую корку, увеличение толщины которой пропорционально скорости фильтрации, и поскольку проницаемость корки на несколько порядков ($10^{-5} \div 10^{-6}$) ниже проницаемости пласта, то даже незначительная толщина глинистой корки на стенке скважины существенно снижает как расход фильтрата, так и градиент давления в пористой среде.

На начальной стадии процесса фильтрации, когда влияние глинистой корки, находящейся на стенке скважины, еще невелико, процесс внедрения фильтрата в пласт определяется в основном дифференциальным давлением между скважиной и пластом. Однако по мере увеличения толщины глинистой корки, способствующей гидродинамической изоляции пласта, дальнейшее поступление фильтрата уменьшается, а его распределение в околоскважинном пространстве происходит благодаря процессам диффузии и действию капиллярных сил.

Фильтрационное течение в околоскважинном пространстве является движением двухкомпонентной жидкости: пластовой воды и фильтрата раствора, нефти и фильтрата, газа и фильтрата. Движение происходит в неоднородной пористой среде, состоящей из пласта и глинистой корки, толщина которой меняется в ходе фильтрации с неизвестной заранее скоростью, определяемой динамикой процесса фильтрации. Практический интерес представляет также случай, когда в результате спуско-подъемных операций глинистая корка полностью срывается со стенок скважины.

Имеются две основные математические модели формирования зоны проникновения:

А. Модель течения смешивающихся жидкостей, описывающая процесс внедрения фильтрата бурового раствора в водонасыщенную часть пласта. Предполагается, что течение жидкости подчиняется закону Дарси, а изменение насыщенности фильтрата происходит двумя путями: перемещением его вместе со всей жидкостью и путем эффективной диффузии.

Б. Модель течения несмешивающихся жидкостей, описывающая процесс внедрения фильтрата раствора в нефтеносный (газонасный) пласт. Изменение насыщенности фильтрата происходит благодаря действию напорных и капиллярных сил, при этом учитывается зависимость фазовых проницаемостей от насыщенности фильтрата.

Рассмотрим основные соотношения, применяемые в данной главе. Средняя скорость жидкости $\vec{u}$ в поровом пространстве связана со скоростью фильтрации $\vec{v} = m \vec{u}$ (m — пористость среды).

В гидродинамике [8,11] уравнение движения жидкости имеет вид

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \text{grad } p + \vec{f} - \vec{g}.$$

Здесь p — давление жидкости, ρ — плотность, $\vec{g}$ — ускорение свободного падения, $\vec{f}$ — сила сопротивления, которую испытывает жидкость при движении в порах. В соответствии с законом Дарси сила сопротивления пропорциональна первой степени скорости фильтрации:

$$\vec{f} = -\frac{\nu}{K} \vec{v},$$

где K — коэффициент сопротивления (совпадающий с коэффициентом абсолютной проницаемости пористой среды), $\nu = \mu/\rho$ — кинематическая вязкость. Это выражение внесем в уравнение гидродинамики, в котором вследствие незначительной скорости жидкости пренебрежем инерциальными членами:

$$\frac{1}{\rho} \text{grad } p + \vec{g} = -\frac{\nu}{K} \vec{v}.$$

В дальнейшем будем предполагать, что сила тяжести направлена вдоль оси z , $\vec{g} = g \vec{e}_z$ (g — ускорение свободного падения, $\vec{e}_z$ — единичный вектор вдоль оси z). Предполагая несжимаемость жидкости и вводя потенциал скорости фильтрации

$$\Phi = p + \rho g z,$$

уравнения движения можно записать в следующем виде, являющемся одним из представлений закона Дарси:

$$\vec{v} = -\frac{K}{\mu} \text{grad } \Phi.$$

Так как для несжимаемой жидкости уравнение неразрывности имеет вид

$$\text{div } \vec{v} = 0,$$

то потенциал Φ удовлетворяет уравнению Лапласа:

$$\Delta\Phi = 0.$$

Наряду с потенциалом скорости фильтрации часто рассматривают пьезометрический напор жидкости $\xi = \Phi/(\rho g)$.

3.2. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ПРОЦЕССА ФОРМИРОВАНИЯ ЗОНЫ ПРОНИКНОВЕНИЯ В ВОДОНОСНЫХ И НЕФТЕГАЗОНОСНЫХ ПЛАСТАХ

Вследствие проницаемости коллектора в области его пересечения скважиной образуется зона проникновения фильтрата глинистого раствора. Изучение динамики изменения физических свойств коллектора в процессе проникновения фильтрата раствора, определение скорости перемещения и формы контакта фильтрата с пластовым флюидом, исследование изменения толщины глинистой корки в ходе фильтрации осуществляются на основе применения широкого комплекса геофизических методов исследования скважин и позволяют наиболее эффективно выделять проницаемые породы, определять коллекторские параметры пласта и т. п. Таким образом, изучение процесса формирования зоны проникновения является одной из основных задач геофизических исследований скважин.

Всюду ниже мы будем предполагать, что бурение скважины производится с применением глинистого раствора, фильтратом которого служит вода. Когда давление в скважине превышает давление флюида пласта, из скважины в пласт начинает поступать фильтрат глинистого раствора. Это приводит к оседанию на стенках скважины частиц глины с образованием глинистой корки, пористой и проницаемой. Фильтрат проникает в пласт через глинистую корку, толщина которой пропорциональна скорости и времени фильтрации и, поскольку проницаемость глинистой корки на несколько порядков ниже проницаемости пласта, образование корки существенно влияет на процесс проникновения фильтрата в пласт и образование корки должно быть включено в описание механизма образования зоны проникновения.

Предположим, что состав промывочной жидкости в ходе фильтрации не меняется, иными словами, поглощение глинистого раствора при фильтрации сопровождается внедрением

жидкой фазы раствора в пласт, в то время как соответствующее количество твердой фазы остается на стенке скважины, образуя глинистую корку.

Покажем, что скорость увеличения толщины глинистой корки на стенке скважины радиуса r_c связана с радиальной составляющей скорости фильтрации v_r в точках на поверхности глинистой корки радиусом r_x следующим соотношением:

$$\frac{dr_x}{dt} = -w v_r, \quad (3.1)$$

где $w = \frac{f_T}{(1-m_x)(1-f_T)}$, $f_T = V_T / (V_T + V_\Phi)$ — доля объема глинистого раствора, приходящаяся на твердые частицы; V_T и V_Φ — соответственно объемы твердой фазы и фильтрата в составе глинистого раствора.

Согласно предположению, что состав промывочной жидкости не меняется в ходе фильтрации, имеем

$$df_T/dt = 0,$$

откуда следует

$$\frac{dV_T}{dt} = \frac{f_T}{1-f_T} \frac{dV_\Phi}{dt}.$$

Таким образом, частицы в элементарном объеме $V_T + V_\Phi$ раствора, оседая на поверхности площадью F стенки скважины радиуса r_c , образуют глинистую корку с пористостью m_x и объемом скелета

$$V_T = (1 - m_x)(r_c - r_x) F,$$

и, следовательно, изменение объема за единицу времени

$$\frac{dV_T}{dt} = -(1 - m_x) F \frac{dr_x}{dt}.$$

Соответствующее изменение объема фильтрата за единицу времени $dV_\Phi/dt = Fv_r$. Подставляя последние два соотношения в выражение, связывающее dV_T/dt с dV_Φ/dt , получим формулу (3.1).

Будем рассматривать глинистую корку как пористую среду, для которой также справедлив закон Дарси, и, поскольку в ходе фильтрации толщина глинистой корки на стенке скважины увеличивается, в результате мы имеем процесс фильтрации в неоднородной области с подвижной граничной поверхностью.

Другой режим течения в околоскважинном пространстве в обсаженной скважине, когда нефтяные или газовые скважины после бурения закрепляют спускаемыми в них колоннами стальных труб. Наружный диаметр труб на несколько сантиметров меньше диаметра скважины, и между колонной и стенкой скважины остается кольцевое пространство, называемое «затрубным». В интервале, где могут быть встречены продуктивные пласты, затрубное пространство заполняют цементным раствором, при этом возникает гидродинамическая изоляция скважины от пласта. Фильтрат глинистого раствора, поступивший в пласт в ходе бурения, после обсадки скважины перемещается в пласте благодаря молекулярной диффузии и действию капиллярных сил. Такой режим течения называется расформированием зоны проникновения.

В работе рассмотрены два основных класса математических моделей фильтрации неоднородных жидкостей в пористых средах — течение смешивающихся и течение несмешивающихся жидкостей. Исследуем указанные модели для постановки начально-краевых задач, описывающих процесс формирования и расформирования зоны проникновения фильтрата глинистого раствора.

А. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ТЕЧЕНИЯ СМЕШИВАЮЩИХСЯ ЖИДКОСТЕЙ

Данный случай имеет место при проникновении фильтрата глинистого раствора в водонасыщенную часть нефтегазоносного пласта, когда происходит смешивание фильтрата с минерализованной пластовой водой. Поскольку оба компонента имеют различные значения удельного электрического сопротивления, в зоне проникновения в результате смешивания возникает область с неоднородным распределением удельного сопротивления. Исследование динамики этой зоны представляет интерес для геофизических исследований скважин электрическими методами.

Система дифференциальных уравнений, описывающая процессы переноса и смешивания фильтрата с пластовой водой, получена в работах [7, 9, 12, 23] и имеет вид:

$$\operatorname{div} \left\{ \frac{K}{\mu} \rho(S) [\operatorname{grad} p + \rho(S) g \vec{e}_z] \right\} = m \frac{\partial \rho}{\partial S} \frac{\partial S}{\partial t}, \quad (3.2)$$

$$\operatorname{div} [D^* \rho(S) \operatorname{grad} S] - \rho(S) \vec{v} \operatorname{grad} S = m \rho(S) \frac{\partial S}{\partial t}, \quad (3.3)$$

где

$$\vec{v} = -\frac{K}{\mu} [\operatorname{grad} p + \rho(S) g \vec{e}_z]; \quad (3.4)$$

S — насыщенность фильтрата; D^* — коэффициент диффузии.

Уравнения (3.2) — (3.4) представляют математическое описание процессов формирования зоны проникновения как для вертикальных, так и для горизонтальных скважин. Задавая соответствующие области движения и начально-краевые условия для данных уравнений, получим формулировки о зоне проникновения для вертикальных или горизонтальных скважин.

Рассмотрим сначала решения уравнений (3.2), (3.3) для вертикальных скважин при наличии осевой симметрии процесса. Ось симметрии z совпадает с осью скважины и направлена вертикально вверх. Область Ω задания уравнений (3.2), (3.3) является кольцом, образованным двумя цилиндрическими поверхностями с общей осью z и радиусами r_c , r_∞ (радиус скважины, радиус пласта), ограниченными сверху и снизу подошвой и кровлей пласта ($z=0$, $z=H$). Предполагая несжимаемость фильтрата раствора, получим следующее уравнение для распределения давления в глинистой корке:

$$\operatorname{div} \left[\frac{K_x}{\mu} \operatorname{grad} p_x(r, t) \right] = 0, \quad r_c \leq r \leq r_\infty, \quad (3.5)$$

с краевыми условиями:

$$p_x(r, t) = p_c \text{ при } r = r_c, \quad (3.6)$$

где p_c — давление в скважине; K_x — коэффициент абсолютной проницаемости глинистой корки;

при $r = r_c$ имеем условие непрерывности давления в корке и пласте, а также условие равенства потоков фильтрата и смеси фильтрата с пластовой жидкостью через поверхность стенки скважины:

$$p_x(r_c, t) = p(\vec{r}, t) \quad \left. \vphantom{\frac{K_x}{\mu} \frac{\partial p_x(r_c, t)}{\partial r} = \frac{K}{\mu} \frac{\partial p(\vec{r}, t)}{\partial r}} \right\} \text{ при } \vec{r} = (r, z) \in \Gamma_c, \quad (3.7)$$

$$\frac{K_x}{\mu} \frac{\partial p_x(r_c, t)}{\partial r} = \frac{K}{\mu} \frac{\partial p(\vec{r}, t)}{\partial r} \quad \left. \vphantom{\frac{K_x}{\mu} \frac{\partial p_x(r_c, t)}{\partial r} = \frac{K}{\mu} \frac{\partial p(\vec{r}, t)}{\partial r}} \right\} \quad (3.8)$$

где Γ_c — поверхность стенки скважины; $p(\vec{r}, t)$ — давление в пласте смеси фильтрата с пластовой водой. При постоянных коэффициентах K_x и μ решение уравнения (3.5) имеет вид

$$p_x(r, t) = C_1 \ln r + C_2, \quad r_x \leq r \leq r_c. \quad (3.9)$$

Из краевых условий (3.6) и (3.7) следует

$$C_1 = \frac{p(\vec{r}, t) - p_c}{\ln r_c / r_x}, \quad \vec{r} \in \Gamma_c.$$

Подставляя решение (3.9) в левую часть (3.8), имеем

$$\frac{\partial p(\vec{r}, t)}{\partial r} = \alpha(t) [p(\vec{r}, t) - p_c], \quad (3.10)$$

$$\text{где } \alpha(t) = \frac{K_x}{\mu} \frac{1}{r_c \ln r_c / r_x(t)}, \quad \vec{r} \in \Gamma_c, \quad t > 0.$$

Выражение (3.10) является краевым условием для уравнения (3.2) при $\vec{r} \in \Gamma_c$.

Краевым условием при $\vec{r} \in \Gamma_c$ для уравнения (3.3) является условие непрерывности расхода фильтрата:

$$S(r, t) = 1 + \frac{1}{v_r(\vec{r}, t)} D^* \frac{\partial S}{\partial r}, \quad \vec{r} \in \Gamma_c.$$

Выбирая расстояние $r = r_\infty$ от оси скважины настолько большим, чтобы состояние пласта можно было считать невозмущенным, имеем:

$$S(\vec{r}, t) = 0, \quad p(\vec{r}, t) = p_{пл}, \quad \vec{r} = (r, z) \in \Gamma_\infty,$$

где $p_{пл}$ — пластовое давление; Γ_∞ — цилиндрическая поверхность радиуса r_∞ . На горизонтальных поверхностях плоскостей кровли и подошвы пласта поставим условия непротекания:

$$\frac{\partial p}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial z} = 0, \quad z = 0 \text{ и } z = H. \quad (3.13)$$

В начальный момент времени $t = 0$, когда глинистая корка отсутствует, давление и насыщенность в пористой среде равны:

$$p(r, z, 0) = C_1 \ln r + C_2, \quad (r, z) \in \Omega, \quad (3.14)$$

$$C_1 = \frac{p_c - p_{пл} + \rho(S)gz}{\ln r_c / r_\infty}, \quad C_2 = p_c - C_1 \ln r_c,$$

$$S(r, z, 0) = 0. \quad (3.15)$$

Уравнения (3.2), (3.3) вместе с краевыми и начальными условиями (3.10)—(3.15), а также с уравнением (3.1) для скорости изменения толщины глинистой корки на стенках скважины составляют замкнутую систему, описывающую процесс формирования зоны проникновения фильтрата раствора в водонесных пластах.

Б. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ТЕЧЕНИЯ НЕСМЕШИВАЮЩИХСЯ ЖИДКОСТЕЙ

При изучении процесса проникновения фильтрата глинистого раствора в нефте- или газонесный пласт применяется модель несмешивающихся жидкостей. Распределение фильтрата глинистого раствора в зоне проникновения происходит под действием перепада давления между скважиной и коллектором, капиллярных и гравитационных сил. Весьма значительное влияние на распределение фильтрата оказывает процесс образования и нарастания глинистой корки на стенках скважины.

Система дифференциальных уравнений, описывающая механизм движения несмешивающихся жидкостей, получена в работах [20, 21] и имеет следующий вид:

$$\operatorname{div} \left[K \frac{k_n}{\mu_n} \operatorname{grad} \Phi_n \right] = -m S' \left[\frac{\partial \Phi_n}{\partial t} - \frac{\partial \Phi_v}{\partial t} \right], \quad (3.16)$$

$$\operatorname{div} \left[K \frac{k_v}{\mu_v} \operatorname{grad} \Phi_v \right] = m S' \left[\frac{\partial \Phi_n}{\partial t} - \frac{\partial \Phi_v}{\partial t} \right], \quad (3.17)$$

$$p_n - p_{\text{кап}} = p_c(S), \quad S' = dS/dp_{\text{кап}}.$$

Здесь S — водонасыщенность; индексы «н» и «в» означают соответственно нефть и воду, $k_{n,v}$ — относительные проницаемости, $\Phi_{n,v}$ — потенциалы скоростей фильтрации, $p_c(S)$ — заданная (известная) функция зависимости капиллярного давления p_c от концентрации S , являющаяся непрерывной и монотонно убывающей с ростом S .

Вводя вместо потенциалов Φ_n и Φ_v новые функции

$$T = (\Phi_n + \Phi_v)/2, \quad R = (\Phi_n - \Phi_v)/2,$$

получим основную систему уравнений, описывающих совместное течение пластового флюида и фильтрата раствора:

$$\operatorname{div} [M \operatorname{grad} T] + \operatorname{div} [N \operatorname{grad} R] = 0, \quad (3.18)$$

$$\operatorname{div} [N \operatorname{grad} T] + \operatorname{div} [M \operatorname{grad} R] = -4m \frac{dS}{dp_c} \frac{\partial R}{\partial t}, \quad (3.19)$$

где

$$M = K \frac{k_n(S)}{\mu_n} + K \frac{k_n(S)}{\mu_n}, \quad N = K \frac{k_n(S)}{\mu_n} - K \frac{k_n(S)}{\mu_n}.$$

Используя определение функции R , находим

$$p_{\text{кап}}(S) = 2R + \Delta \rho gh.$$

Принимая во внимание непрерывность и монотонность функции $p_c(S)$, можно представить водонасыщенность S в виде функции от R : $S = \varphi(R)$. Отсюда видно, что уравнения (3.18) и (3.19) являются квазилинейными уравнениями эллиптического и параболического типов.

Исследуем вопрос о постановке краевых и начальных условий, ограничиваясь для простоты одномерной в радиальном направлении постановкой задачи в цилиндрической системе координат.

Пусть r_c — радиус скважины. Предположим, что в ходе фильтрации давление глинистого раствора в скважине остается постоянным и равно p_c . Мы рассматриваем, как и в п. 1 настоящего раздела, фильтрацию, сопровождающуюся наружной кольматацией. Пусть r_* — расстояние от оси скважины до внутренней поверхности глинистой корки, представляющей собой пористую среду с проницаемостью K_* и пористостью m_* , через которую под действием давления в скважине, превышающего пластовое давление, в пласт проникает фильтрат глинистого раствора, а соответствующее количество твердой фазы оседает на стенках скважины, увеличивая тем самым толщину глинистой корки. Скорость увеличения толщины глинистой корки пропорциональна скорости фильтрации в соответствии с формулой (3.1).

Предполагая несжимаемость фильтрата раствора, получим уравнение для распределения давления в глинистой корке:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \frac{K_*}{\mu} \frac{\partial p_*(r, t)}{\partial r} \right] = 0, \quad r_* \leq r \leq r_c, \quad (3.20)$$

с краевыми условиями

$$p_*(r, t) = p_c, \quad r = r_*; \quad (3.21)$$

при $r = r_c$ ставятся условия непрерывности давления фильтра-та, непрерывности расхода фильтра через поверхность стенки скважины, а также условие отсутствия течения нефти (газа) через стенку нагнетающей воду скважины:

$$\frac{\partial p_n}{\partial r} = 0, \quad (3.22)$$

$$-\frac{K_k}{\mu_n} \frac{\partial p_k}{\partial r} = -K_k \frac{k_n(S)}{\mu_n} \frac{\partial p_n}{\partial r}, \quad (3.23)$$

$$p_k(r, t) = p_n(r, t), \quad r = r_c. \quad (3.24)$$

Уравнения (3.21)—(3.24) позволяют получить краевые условия при $r = r_c$ для системы уравнений (3.18), (3.19). Для этого умножим уравнение (3.22) на $\pm K \frac{k_n(S)}{\mu_n}$, сложим полученные выражения с уравнением (3.23), получим ($r = r_c$):

$$2K \frac{k_n(S)}{\mu_n} \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{K_k}{\mu_n} \frac{\partial p_k}{\partial r}, \quad (3.25)$$

$$2K \frac{k_n(S)}{\mu_n} \frac{\partial R}{\partial r} = -\frac{K_k}{\mu_n} \frac{\partial p_k}{\partial r}. \quad (3.26)$$

Нетрудно видеть, что решение уравнения (3.20) имеет вид $p_k(r) = C_1 \ln r + C_2$, $r_k \leq r \leq r_c$.

Принимая во внимание условие (3.24), а также соотношения

$$p_n = T - R, \quad p_k(r_c) = p_c,$$

получим:

$$C_1 = \frac{T - R - p_c}{\ln r_c / r_k}.$$

Подставляя в правые части уравнений (3.25), (3.26) значение $\frac{\partial p_k}{\partial r} = C_1 / r$, получим краевые условия при $r = r_c$ для системы уравнений (3.18), (3.19):

$$\frac{\partial T}{\partial r} = \frac{\alpha(t)}{K k_n(S)} (T - R - p_c), \quad (3.27)$$

$$\frac{\partial R}{\partial r} = -\frac{\alpha(t)}{K k_n(S)} (T - R - p_c), \quad (3.28)$$

где

$$\alpha(t) = \frac{K_x}{2r_c \ln r_c / r_x(t)}.$$

Выбирая расстояние от скважины $r = r_\infty$ достаточно большим, имеем при $r = r_\infty$:

$$p_n = p_\infty = \text{const}, \quad p_n - p_v = p_{\text{кап}}(S_{\min}),$$

где p_∞ — давление нефти (газа) при $r = r_\infty$; $S_{\min}$ — концентрация воды при $r = r_\infty$. Переходя к функциям T и R , получим в результате краевые условия при $r = r_\infty$ для системы уравнений (3.18), (3.19):

$$T = p_\infty - p_{\text{кап}}(S_{\min}), \quad (3.29)$$

$$R = \frac{1}{2} p_{\text{кап}}(S_{\min}). \quad (3.30)$$

Уравнения (3.29), (3.30) являются в то же время и начальными условиями для системы (3.18), (3.19). Добавляя сюда соотношение (3.1), получим замкнутую систему уравнений, описывающую процесс формирования зоны проникновения фильтрата раствора в радиальном направлении в нефтеносном (газоносном) пласте.

Следует заметить, что, используя вектор полной скорости фильтрации нефти (газа) и воды $\vec{v} = \vec{v}_n + \vec{v}_v$, уравнение (3.19) можно переписать в виде

$$-\text{div} [\psi p'_{\text{кап}} \text{grad } S] = f' \vec{v} \text{grad } S = m \frac{\partial S}{\partial t}, \quad (3.31)$$

где

$$\psi = K \frac{k_n}{\mu_n} K \frac{k_v}{\mu_v} M^{-1}, \quad f' = \frac{df}{dS}, \quad f = K \frac{k_v}{\mu_v} M^{-1}, \quad p'_{\text{кап}} = \frac{dp_{\text{кап}}}{dS} < 0.$$

В этой форме уравнение (3.31) имеет вид, аналогичный виду уравнения (3.3) для модели течения смешивающихся жидкостей. Из уравнений (3.3) и (3.31) видно, что перемещение флюида происходит благодаря конвективному переносу, а также процессу диффузии в первой модели и под действием капиллярных сил — во второй.

Рассмотрим постановку краевых и начальных условий для системы уравнений (3.18), (3.19), описывающих процесс формирования зоны проникновения в нефтеносных пластах.

Поскольку скважина гидродинамически изолирована от нефтеносного пласта, то при $r=r_c$ отсутствуют потоки нефти и фильтрата глинистого раствора:

$$\frac{\partial p_n}{\partial r}=0, \quad \frac{\partial p_n}{\partial r}=0, \quad r=r_c, \quad t>0.$$

Переходя к функциям T и R , имеем:

$$\frac{\partial T}{\partial r}=0, \quad \frac{\partial R}{\partial r}=0, \quad r=r_c, \quad t>0.$$

Выбирая расстояние от скважины $r=r_\infty$ достаточно большим, из соотношений (3.29), (3.30) получаем краевые условия при $r=r_\infty$:

$$\frac{\partial T}{\partial r}=0, \quad \frac{\partial R}{\partial r}=0, \quad r=r_\infty, \quad t>0.$$

В качестве начальных условий принимаем значения функций T и R , отвечающие окончанию процесса формирования зоны проникновения.

Система уравнений (3.2) и (3.3) с краевыми и начальными условиями (3.10)—(3.15), описывающая процесс формирования зоны проникновения на основе модели течения смешивающихся жидкостей, и система уравнений (3.18), (3.19) с начальными и краевыми условиями (3.20)—(3.27), основанная на модели течения несмешивающихся жидкостей, решаются методом конечных разностей [18]. На примере исследования процесса фильтрации в одномерном линейном канале рассмотрим основные особенности, связанные с применением этого метода.

Пусть в одномерном образце длиной L с постоянным поперечным сечением исследуется фильтрация несжимаемой жидкости, причем скорость фильтрации v не зависит от координаты x (ось x направлена вдоль образца). В этом случае уравнение (3.3) упрощается и принимает вид [22, 23]

$$D \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} - v \frac{\partial S}{\partial x} = m \frac{\partial S}{\partial t},$$

на входе и выходе из образца при $x=0$ и $x=L$ ставятся соответственно условия нагнетания и отсутствия фильтрата (длина образца считается достаточно большой, чтобы за рассматриваемый промежуток времени фильтрат не успел достигнуть выхода из образца):

$$S(0, t)=1, \quad S(L, t)=0, \quad t>0.$$

В начальный момент времени ($t=0$) фильтр в образце отсутствует:

$$S(x, 0)=0, x \in (0, L).$$

В области изменения переменных x, t вводится равномерная сетка с узлами:

$$x_i = ih, t_n = n\tau, S_{i,n} = S(x_i, t_n), i = 0, 1, \dots, M; n = 0, 1, \dots;$$

$h = \text{const}, \tau = \text{const}$ — шаги сетки по пространству и времени.

Во всех внутренних узлах сетки x_i $1 \leq i \leq M-1$ имеем разностное уравнение

$$D \Delta^2 (S_{i,n} + S_{i,n+1}) + \frac{v}{h} (S_{i-1/2,n}^* + S_{i-1/2,n+1}^* - S_{i+1/2,n}^* - S_{i+1/2,n+1}^*) = 2 \frac{m}{\tau} (S_{i,n+1} - S_{i,n}),$$

где

$$\Delta^2 S_{i,n} = (S_{i+1,n} - 2 S_{i,n} + S_{i-1,n})/h.$$

Рассмотрим два варианта выбора S^* :

$$S_{i+1/2,n}^* = \frac{1}{2} (S_{i+1,n} + S_{i,n})$$

и

$$S_{i+1/2,n}^* = S_{i,n}.$$

Первый вариант дает центральную разностную производную для аппроксимации $\frac{\partial S}{\partial x}$:

$$\frac{\partial S}{\partial x} \sim (S_{i+1} - S_{i-1})/(2h);$$

второй вариант дает левую разностную производную для аппроксимации $\frac{\partial S}{\partial x}$:

$$\frac{\partial S}{\partial x} \sim (S_i - S_{i-1})/h.$$

При этом погрешность аппроксимации в первом варианте равна $O(h^2)$, а во втором $O(h)$ и, казалось бы, что касается точности, первый вариант должен быть лучше. Однако каждый из вариантов имеет свои достоинства и недостатки.

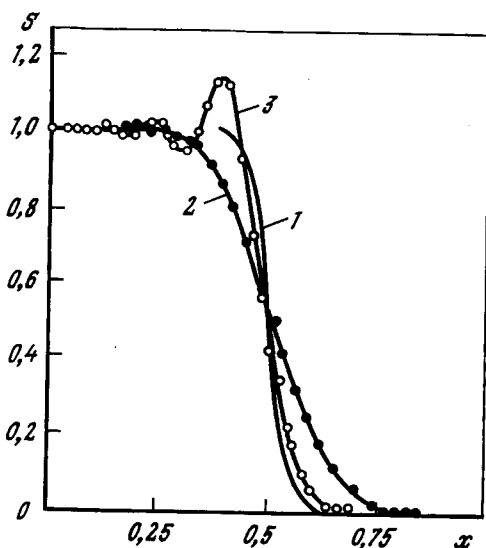


Рис. 3.1. Численное решение задачи одномерной фильтрации с диффузией:

1—точное решение; 2—левая разностная производная; 3—центральная разностная производная

Типичные решения, соответствующие этим двум вариантам, показаны на рис. 3.1. Значения параметров были выбраны следующими:

$$v/m = 0,01411 \text{ см/с}; D = 10^{-3} \text{ см}^2/\text{с}; L = 182,9 \text{ см};$$

$M = L/h = 48$; $vt/(mL) = 0,007708$ (объем порового пространства, заполняемый за один шаг по времени).

Кривые на рис. 3.1 отвечают моменту времени $vt/(mL) = 0,5$. Для сравнения приведена соответствующая кривая точного решения этой задачи:

$$S(x, t) = \frac{1}{2} \left(1 - \operatorname{erf} \frac{x - vt/m}{2 \sqrt{Dt/m}} \right),$$

где

$$\operatorname{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z \exp(-q^2) dq.$$

Точное решение представляет собой волну ступенчатой формы со сглаженным передним фронтом перехода от значения $S=0$

Рис. 3.2. Решение, использующее комбинацию разностных уравнений с центральной и левой разностной производными: 1 — точное решение; 2 — $M=12$; 3 — $M=48$

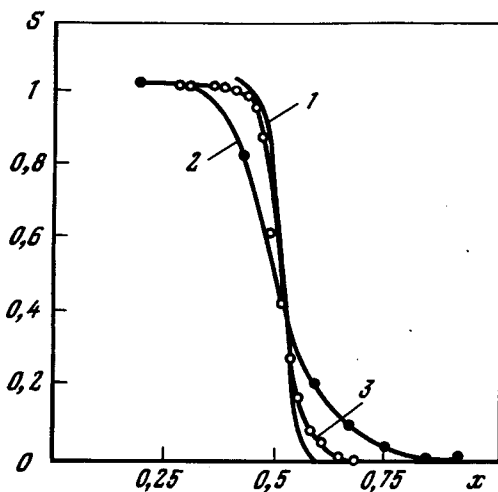
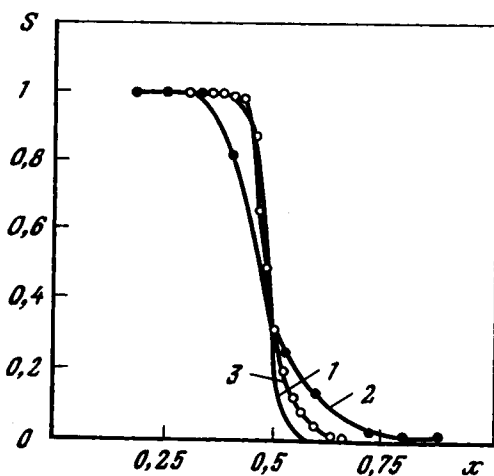


Рис. 3.3. Решение, использующее комбинацию разностных производных центральной и левой с переносом осцилляций: 1 — точное решение; 2 — $M=12$; 3 — $M=48$



к значению $S=1$,двигающуюся со скоростью v/m . Ширина «размазывания» фронта пропорциональна $\sqrt{Dt/m}$.

На рис. 3.1 видна типичная особенность варианта разностного уравнения с центральной разностной производной — численное решение осциллирует около значения $S=1$ в области позади фронта волны, что является результатом нару-

шения условия монотонности [18] данной разностной схемы. Достоинством данного варианта является то, что численное решение достаточно хорошо воспроизводит крутой фронт решения и мало его размазывает. Численное решение уравнения с левой разностной производной имеет другую характерную особенность — будучи монотонным, оно имеет тенденцию к размазыванию фронта волны. В таком разностном уравнении есть внутренний коэффициент диффузии D_h чисто разностного происхождения, зависящий от параметров разностной схемы.

Поэтому ширина «размазывания» фронта волны будет в данном случае определяться суммой коэффициентов диффузии $D + D_h$, и для получения достаточно точного решения требуется использовать достаточно мелкие разностные сетки, чтобы выполнялось условие $D_h \ll D$.

Указанные особенности двух вариантов подсказывают возможность использования обеих разностных схем так, чтобы уравнение с центральной разностью использовалось на фронте и перед ним, а уравнение с односторонней разностной производной использовалось за фронтом волны.

Результаты применения такого комбинированного способа приведены на рис. 3.2. Из рисунка следует, что этот метод при $M=48$ воспроизводит крутизну фронта волны достаточно хорошо, однако имеется некоторое размазывание фронта.

В работе [23] предложен также метод «переноса осцилляций», улучшающий точность решения в окрестности фронта. На рис. 3.3 приведены численные решения, полученные этим методом для $M=12$ и $M=48$. Видно, что этот алгоритм дает лучшее решение, чем предыдущий. Метод переноса осцилляций может быть применен и для многомерного случая.

На примере одномерного модельного уравнения рассмотрим применение метода конечных разностей для решения задач течения несмешивающихся жидкостей.

На рис. 3.4 и 3.5 изображены шаблоны [18] смешанной и чисто неявной разностных схем для решения модельного квазилинейного уравнения, описывающего процесс вытеснения нефти водой в линейном канале:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(M(x, p) \frac{\partial p}{\partial x} \right) = \frac{\partial p}{\partial t}.$$

Здесь $M(x, p)$ — подвижность, p — давление.

Рис. 3.4. Смешанная разностная схема

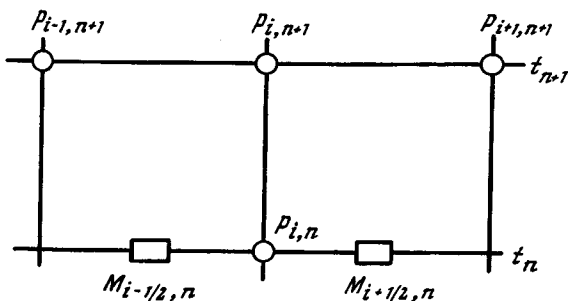


Рис. 3.5. Неявная разностная схема

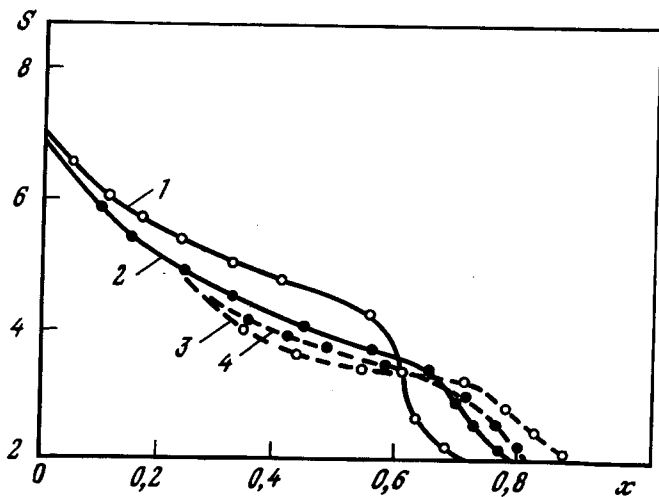
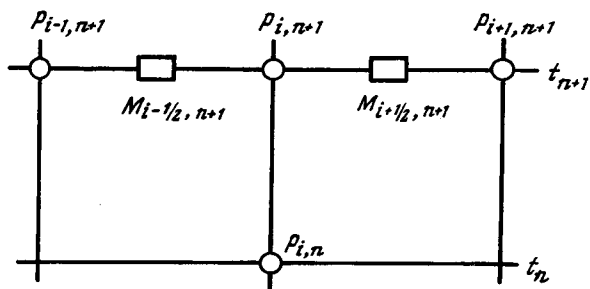


Рис. 3.6. Зависимость распределения водонасыщенности от временного шага τ для смешанной и неявной схем, $h = \text{const} = 1/25$:
 1 — смешанная схема, $\tau = 1/47$; 2 — смешанная схема, $\tau = 1/200$; 3 — неявная схема, $\tau = 1/47$; 4 — неявная схема, $\tau = 1/200$

Если подвижность $M(x, p)$ — постоянная величина, то разностные аппроксимации данного уравнения на обоих шаблонах совпадают и абсолютно устойчивы [18].

В случае, когда подвижность является быстроменяющейся функцией p , высокой эффективностью, как показали численные эксперименты, обладают чисто неявные разностные схемы. На рис. 3.6 приведены результаты численного расчета вытеснения нефти водой с использованием смешанной и чисто неявной схемы. При использовании смешанной схемы условие устойчивости приводит к довольно жестким ограничениям величины шагов разностной сетки, тогда как чисто неявная схема абсолютно устойчива.

Общий метод исследования устойчивости нелинейных разностных схем для уравнений фильтрации излагается в разделе 3.3.

3.3. СУЩЕСТВОВАНИЕ РЕШЕНИЯ И УСТОЙЧИВОСТЬ НЕЛИНЕЙНЫХ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ФИЛЬТРАЦИИ

Анализ устойчивости и существования решения рассмотрим на примере двухфазного течения несмешивающихся жидкостей в линейном канале. В этом случае система (3.18), (3.19) сводится к одному уравнению:

$$F(S) = \frac{\partial}{\partial x} \left(k_0 f \frac{\partial r}{\partial x} \right) - V \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial S}{\partial t} = 0, \quad (3.32)$$

где

$$k_n = k_n(S), \quad f(S) = k_n / (k_n + k_b), \quad r(S) = -(p_n - p_b) = -p_{\text{кан}}(S),$$

$V(x, t)$ — непрерывно дифференцируемые функции своих аргументов, причем

$$k_n(S) > 0, \quad f(S) > 0, \quad \frac{\partial f}{\partial S} > 0, \quad \frac{\partial r}{\partial S} > 0.$$

Типичный вид функций $k(S)$, $f(S)$, $r(S)$ и их производных представлен на рис. 3.7, 3.8.

Для уравнения (3.32) рассмотрим первую начально-краевую задачу:

уравнение (3.32) задано в прямоугольнике

$$\bar{D} = (0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq T),$$

Рис. 3.7. Типичная зависимость функций k_n и k_s от S

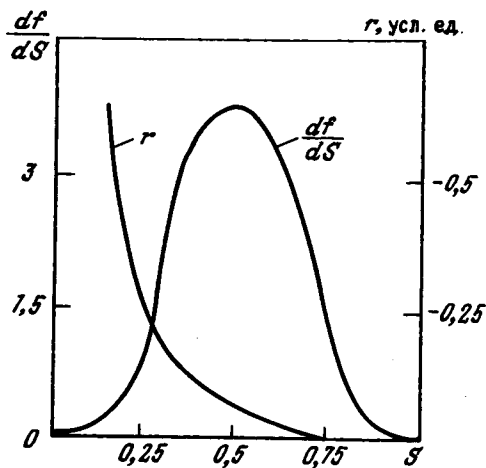
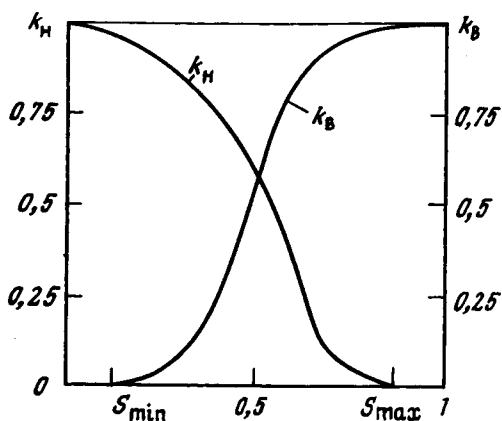


Рис. 3.8. Типичная зависимость функций r и df/dS от S

требуется определить функцию S , удовлетворяющую уравнению (3.32), начальному условию

$$S(x, 0) = S_0(x), \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (3.33)$$

и граничному условию

$$S(0, t) = S_{\max}, \quad S(1, t) = S_{\min}, \quad t \in [0, T]. \quad (3.34)$$

Для квазилинейного уравнения второго порядка параболического типа со многими независимыми переменными и дивергентной главной частью вида

$$Fu = u_t - \frac{d}{dx_i} [a_i(x, t, u, u_x)] + a(x, t, u, u_x) = 0$$

(здесь при вычислении $\frac{d}{dx_i}$ учитывается как явная зависимость функции a_i от x_i , так и зависимость a_i от x_i в функциях $u(x, t)$ и $u_x(x, t)$), частным случаем которого является уравнение (3.32), при условии непрерывной дифференцируемости функций $a_i(x, t, u, u_x)$, $a(x, t, u, u_x)$ на любом компактном множестве значений своих аргументов и некоторых ограничениях на характер роста этих функций относительно u и u_x , существует классическое решение и его единственность для первой краевой задачи [12, 13].

Существование классического решения первой краевой задачи означает, что решение является непрерывным в $\bar{D}$, имеет непрерывные производные u_t , u_x , u_{xx} в D и удовлетворяет во всех внутренних точках D уравнению и начально-краевым условиям.

Для получения приближенного решения задачи (3.32) — (3.34) применим метод конечных разностей [18]. Для этого введем в области $\bar{D}$ разностную сетку $\bar{\omega}_h = \bar{\omega}_h \times \bar{\omega}_\tau$:

$$\bar{\omega}_h = \{x_i = ih, i = 0, 1, \dots, N+1; h = 1/(N+1)\},$$

$$\bar{\omega}_\tau = \{t_n = n\tau, n = 0, 1, \dots, T/\tau\}.$$

Обозначим через S_h^n вектор с компонентами $S_i^n = S(x_i, t_n)$, $0 \leq i \leq N+1$, являющийся абстрактной функцией дискретного аргумента $t = n\tau$. Вектор S_h^n есть элемент линейного нормированного пространства E_h с нормой $\|S_h^n\| = \max_i |S_i^n|$. Обозначим также

$$f(S_i^n) = f_i^n, f_i^{n+1} = f_i, \frac{df(S_i^n)}{dS_i^n} = f'_i, \frac{df(S_i^{n+1})}{dS_i^{n+1}} = \hat{f}'_i.$$

Представим разностную аппроксимацию уравнения (3.32) во всех внутренних узлах сетки $\bar{\omega}_h$ в виде

$$\frac{1}{h} \left(\hat{a}_{i+1/2}^* \frac{r_{i+1}^* - r_i^*}{h} - \hat{a}_{i-1/2}^* \frac{r_i^* - r_{i-1}^*}{h} \right) - V_i \frac{f_i^* - f_{i-1}^*}{h} = \frac{S_i^{n+1} - S_i^n}{\tau},$$

где

$$\tilde{a}_{i-1/2}^* = \frac{1}{2} (k_i^* f_i^* + k_{i-1}^* f_{i-1}^*); \quad k_i^* = k(S_i^*); \quad f_i^* = f(S_i^*); \quad r_i^* = r(S_i^*);$$

при этом, в зависимости от способа представления на сетке величин, помеченных звездочкой, получим различные типы разностных схем.

Явная схема: вместо * надо подставить n :

$$\begin{aligned} \Phi_i(S^n, S^{n+1}) &= a_{i+1/2}^n r_{i+1}^n - (a_{i+1/2}^n + a_{i-1/2}^n) r_i^n + a_{i-1/2}^n r_{i-1}^n + \\ &+ \gamma_i (f_{i-1}^n - f_i^n) + S_i^n - S_i^{n+1} = 0, \quad i = 1, \dots, N, \end{aligned} \quad (3.35)$$

$$a_i^n = \frac{\tau}{h^2} \tilde{a}_i^n, \quad \gamma_i = \frac{\tau}{h} V_i.$$

Неявная схема: вместо * надо подставить $n+1$:

$$\begin{aligned} \Phi_i(S^n, S^{n+1}) &= a_{i+1/2}^{n+1} r_{i+1}^{n+1} - (a_{i+1/2}^{n+1} + a_{i-1/2}^{n+1}) r_i^{n+1} + a_{i-1/2}^{n+1} r_{i-1}^{n+1} + \\ &+ \gamma_i (f_{i-1}^{n+1} - f_i^{n+1}) + S_i^n - S_i^{n+1} = 0, \quad i = 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Краевые и начальные условия аппроксимируются очевидным образом:

$$S_0^n = S_{\max}, \quad S_{N+1}^n = S_{\min}, \quad S_i^0 = S_0(x_i).$$

Пусть

$$\Phi(S^n, S^{n+1}) = 0 \quad (3.37)$$

означает любую из нелинейных разностных схем типа (3.35), (3.36), где $S^n = (S_1^n, S_2^n, \dots, S_N^n)$ — вектор, принадлежащий N -мерному линейному нормированному пространству E . Требуется найти решение нелинейного уравнения (3.37), т. е. найти такой элемент $S^{n+1} \in E$, который является функцией вектора $S^n \in E$ и удовлетворяет уравнению (3.37):

$$S^{n+1} = P(S^n), \quad \Phi(S^n, P(S^n)) = 0, \quad (3.38)$$

где $P = (P_1, \dots, P_N)$ — нелинейное отображение $P: E \rightarrow E$.

Сформулируем определение устойчивости нелинейной схемы.

Для линейных задач понятие корректности и устойчивости определяется следующим образом [18].

Линейная схема называется корректной, если при достаточно малых шагах $\tau \leq \tau_0$ и $h \leq h_0$ выполняется следующее:

1) решение существует и единственно при любых начальных данных $S_h^0 \in E$;

2) существует такое положительное число K , не зависящее от h , τ и выбора S_h^0 , что при любых $S_h^0 \in E$ для решения линейной схемы справедлива оценка

$$\|S_h^{n+1}\| \leq K \|S_h^0\|. \quad (3.39)$$

Неравенство (3.39) выражает свойство непрерывной, равномерной по h и τ зависимости решения линейной схемы от начальных данных и называется условием устойчивости разностной схемы по начальным данным. Для нелинейной схемы условие устойчивости несколько видоизменяется.

Пусть S_h^{n+1} есть точное решение схемы (3.37) в момент времени t_{n+1} при заданном векторе $S_h^n : S_h^{n+1} = P(S_h^n)$. Если вектор S_h^n задан с некоторой погрешностью $\varepsilon^n \in E$, то

$$S_h^{n+1} + \varepsilon^{n+1} = P(S_h^n + \varepsilon^n). \quad (3.40)$$

Определение. Будем говорить, что нелинейная схема (3.37) устойчива, если норма погрешности ε^n , введенной на некотором слое n по времени, не возрастает на последующих слоях по времени:

$$\|\varepsilon^{n+1}\| \leq \|\varepsilon^n\|. \quad (3.41)$$

Пусть отображение $P: E \rightarrow E$ сильно дифференцируемо на некотором подмножестве U пространства E . По формуле конечных приращений для операторной функции [6] имеем

$$\|\varepsilon^{n+1}\| = \|P(S_h^n + \varepsilon^n) - P(S_h^n)\| \leq \sup_{0 \leq \theta \leq 1} \|P'(S_h^n + \theta \varepsilon^n)\| \|\varepsilon^n\|.$$

Отсюда видно, что достаточным условием устойчивости является соотношение

$$\|P'(S)\| \leq 1 \text{ при } S \in U. \quad (3.42)$$

Обозначим $q_{ik}^n = \frac{\partial \varphi_i}{\partial S_k^n}$. Для исследования вопросов существования и устойчивости решений разностных схем введем следующие функциональные матрицы:

$$A = (q_{ik}^n)_{1 \leq i, k \leq N} =$$

$$= \begin{bmatrix} q_{11}^n & q_{12}^n & 0 \\ q_{21}^n & q_{22}^n & q_{23}^n \\ 0 & & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & \beta_1 & 0 \\ b_2 & a_2 & \beta_2 \\ 0 & & \end{bmatrix}, \quad (3.43)$$

$$B = -(q_{ik}^{n+1})_{1 \leq i, k \leq N} =$$

$$= - \begin{bmatrix} q_{11}^{n+1} & q_{12}^{n+1} & 0 \\ q_{21}^{n+1} & q_{22}^{n+1} & q_{23}^{n+1} \\ 0 & & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 & -\delta_1 & 0 \\ -d_2 & c_2 & -\delta_2 \\ 0 & & \end{bmatrix}. \quad (3.44)$$

Докажем ряд предложений для свойств матриц A и B для неявных разностных схем.

Предложение 1. Пусть в схеме (3.36) функции $a(S_i^n)$, $f(S_i^n)$, $r(S_i^n)$ определены при $S_{\min} \leq S_i^n \leq S_{\max}$ и непрерывны вместе со своими производными первого порядка и, кроме того, во всех внутренних точках интервала $(S_{\min}, S_{\max})$ выполнены условия

$$a(S) > 0, f'_i > 0, r'_i > 0$$

для всех i , $1 \leq i \leq N$.

Тогда для неявной схемы (3.36) матрица B невырожденная ($\det B \neq 0$), обратная матрица B^{-1} — положительная и имеет положительное характеристическое число, которое является простым корнем характеристического уравнения и превосходит модули всех остальных характеристических чисел.

Доказательство. Вычислим элементы c_i , δ_i и d_i матрицы B :

$$c_i = \frac{\partial \Phi_i(S, \hat{S})}{\partial \hat{S}_i} = (\hat{r}_i - \hat{r}_{i+1}) \frac{\partial \hat{a}_{i+1/2}}{\partial \hat{S}_i} + (\hat{r}_i - \hat{r}_{i-1}) \frac{\partial \hat{a}_{i-1/2}}{\partial \hat{S}_i} +$$

$$+ (\hat{a}_{i+1/2} + \hat{a}_{i-1/2}) \hat{r}'_i + \gamma_i f'_i + 1;$$

$$\delta_i = \frac{\partial \varphi_i(S, \hat{S})}{\partial \hat{S}_{i+1}} = -(\hat{r}_i - \hat{r}_{i+1}) \frac{\partial \hat{a}_{i+1/2}}{\partial \hat{S}_{i+1}} + \hat{a}_{i+1/2} \hat{r}'_{i+1};$$

$$d_i = \frac{\partial \varphi_i(S, \hat{S})}{\partial \hat{S}_{i-1}} = -(\hat{r}_i - \hat{r}_{i-1}) \frac{\partial \hat{a}_{i-1/2}}{\partial \hat{S}_{i-1}} + \hat{a}_{i-1/2} \hat{r}'_{i-1} + \gamma_i f'_{i-1}.$$

Поскольку решение разностной схемы (3.37) сводится к классическому решению исходной задачи (3.9)—(3.11) со скоростью $O(\tau + h^2)$ [12], то в силу предполагаемой непрерывности функций и их производных, входящих в выражения для c_i , δ_i , d_i , слагаемые, содержащие разности вида $(\hat{r}_i - \hat{r}_{i\pm 1})$, имеют порядок $O(h)$ и при достаточно малом h малы по сравнению с другими слагаемыми в каждом из элементов c_i , δ_i , d_i .

Следовательно, элементы матрицы B имеют вид

$$c_i = 1 + (\hat{a}_{i+1/2} + \hat{a}_{i-1/2}) \hat{r}'_i + \gamma_i f'_i + O(h);$$

$$\delta_i = \hat{a}_{i+1/2} \hat{r}'_{i+1} + O(h); \quad d_i = \hat{a}_{i-1/2} \hat{r}'_{i-1} + \gamma_i f'_{i-1} + O(h).$$

Отсюда в силу условий леммы справедливо равенство

$$c_i = 1 + d_i + \delta_i + O(h); \quad d_i, \delta_i > 0,$$

и при достаточно малых шагах h диагональный элемент c_i превосходит сумму внедиагональных элементов d_i , δ_i и, следовательно, на основании критерия Адамара [2] матрица B является невырожденной.

Для доказательства второй части утверждения предложения 1 представим матрицу B в виде $B = D\tilde{B}$, где D — диагональная матрица с элементами c_i из матрицы B . Рассмотрим матрицу $A = I - \tilde{B}$, где I — единичная матрица:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \delta_1/c_1 & & 0 \\ d_2/c_2 & 0 & & \delta_2/c_2 \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \ddots \end{bmatrix}.$$

Введем первичную матричную норму

$$\|A\|_1 = \max_{1 \leq i \leq N} \sum_{k=1}^{k=N} |a_{ik}|,$$

соответствующую «кубической» норме вектора, $\|x\|_1 = \max_{1 \leq k \leq N} |x_k|$.

Для нормы матрицы A имеем: $\|A\|_1 < 1$. На основании теоремы о существовании и ограниченности преобразования, отвечающего матрице $(I - A)^{-1}$ [6], получим представление

$$\tilde{B}^{-1} = (I - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k. \quad (3.44a)$$

Рассмотрим структуру элементов последовательных степеней матрицы A . Элементы матрицы A положительны и расположены на двух диагоналях, смежных главной диагонали: $a_{i,i+1} > 0$, $a_{i,i-1} > 0$. Пусть $a_{ij}^{(n)}$ элементы матрицы A^k . Тогда, по определению, $a_{ij}^{(2)} = \sum_{k=1}^N a_{ik} a_{kj}$, следовательно, $a_{ij}^{(2)} \geq 0$, причем $a_{ij}^{(2)} > 0$ при $j = i, i \pm 2$. Далее, $a_{ij}^{(3)} = \sum_{k=1}^N a_{ik} a_{kj}^{(2)}$, откуда $a_{ij}^{(3)} > 0$ при $j = i \pm 1, i \pm 3$; $a_{ij}^{(4)} > 0$ при $j = i, i \pm 2, i \pm 4$.

Отсюда видно, что для каждой диагонали с номером $\pm m$, расположенной соответственно выше или ниже главной диагонали (номер которой принимается равным нулю), элементы матрицы A^k , $k = m, m+2, m+4$, находящиеся на диагонали с номером $\pm m$, являются положительными числами.

В силу соотношения (3.44a) все элементы матрицы $\tilde{B}^{-1}$ положительны. Из представления матрицы $B = D\tilde{B}$ имеем $B^{-1} = \tilde{B}^{-1}D^{-1}$.

Поскольку диагональные элементы диагональной матрицы D положительны, то все элементы матрицы B^{-1} также положительны.

Отсюда, на основании теоремы Перрона [2] о свойствах матриц с положительными элементами, заключаем, что матрица B^{-1} обладает вещественным положительным характеристическим числом, которое является простым корнем характеристического уравнения и превосходит модули всех других характеристических чисел. Этому максимальному характеристическому числу соответствует собственный вектор Ψ с положительными координатами. Следовательно, предложение 1 справедливо.

Сформулируем предложение 2 о существовании и единственности решения по явной (3.35) и неявной (3.36) схемам.

Предложение 2. Пусть отображение $\Phi(S^n, S^{n+1}): E \times E \rightarrow F$ определено для явной (3.35) или для неявной (3.36) схемы

в окрестности $U \times V$ точки $(\tilde{S}^n, \tilde{S}^{n+1}) \in E \times E$; E, F — конечномерные пространства размерности N .

Пусть в точке $(\tilde{S}^n, \tilde{S}^{n+1})$ справедливо соотношение $\Phi(\tilde{S}^n, \tilde{S}^{n+1}) = 0$ и выполнены условия предложения 1. Тогда в некоторой окрестности $U_0 \subset U$ точки $\tilde{S}^n$ существует единственное отображение P , определенное и непрерывное в U_0 и такое, что $\tilde{S}^{n+1} = P(\tilde{S}^n)$, $\Phi(S^n, P(S^n)) = 0$ для любой точки $S^n \in U_0$.

Кроме того, отображение P непрерывно дифференцируемо в U_0 и его производная равна $B^{-1}A$, где A, B — матрицы (3.43), (3.44).

Доказательство. В N -мерных пространствах E и F производные $\partial\Phi/\partial S^n, \partial\Phi/\partial S^{n+1}$ отображения $\Phi(S^n, S^{n+1}): E \times E \rightarrow F$ являются линейными операторами из E в F и задаются матрицами A, B согласно формулам (3.43), (3.44). Доказательство опирается на теорему о существовании неявной функции [1, 4], поэтому достаточно ограничиться проверкой выполнения условий этой теоремы:

а) непрерывной дифференцируемости преобразования $\Phi(S^n, S^{n+1})$;

б) линейного гомеоморфизма $\partial\Phi/\partial S^{n+1}: E \rightarrow F$ (иными словами, невырожденности матрицы B).

Требование непрерывной дифференцируемости отображений (3.35), (3.36) вытекает из их определения и непрерывной дифференцируемости входящих в эти выражения функций. Требование о невырожденности матрицы B для явной схемы очевидно (в этом случае $B = -E$). Условие невырожденности матрицы B справедливо для неявной схемы на основании предложения 1. Следовательно, предложение 2 справедливо.

Рассмотрим матрицу $P' = B^{-1}A$. Пусть $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ — ее собственные значения, тогда величина $R(h, \tau) = \max_{1 \leq i \leq N} |\lambda_i|$ называется спектральным радиусом матрицы P' . Спектральный радиус матрицы не превосходит любой из ее норм, $R(h, \tau) \leq \|P'\|$ [4]. Принимая во внимание соотношение (3.44), получаем, что необходимое условие устойчивости нелинейной разностной схемы имеет вид: $R(h, \tau) < 1$.

Для неявной схемы $A = I$ (I — тождественный оператор в E), и необходимое условие устойчивости заключается в том, чтобы все собственные числа матрицы B^{-1} по модулю были меньше единицы. На основании предложения 1 матрица B^{-1}

обладает максимальным собственным значением $R(h, \tau)$, и соответствующий ему собственный вектор Ψ имеет положительные компоненты. Спектральный радиус можно оценить, например, с помощью следующего итерационного процесса, называемого степенным:

$$B\Psi^{n+1} = \tilde{\Psi}^n, \quad \lambda_{n+1} = \frac{(\Psi^{n+1}, \tilde{\Psi}^n)}{(\tilde{\Psi}^n, \tilde{\Psi}^n)}, \quad \tilde{\Psi}^{n+1} = \frac{\Psi^{n+1}}{\lambda_{n+1}}, \quad (3.45)$$

$$(\Psi, \Phi) = \sum_{i=1}^N \psi_i \phi_i, \quad \tilde{\Psi}^0 = \Psi^0,$$

основываясь на следующем утверждении:

для любого произвольного положительного вектора Ψ^0 итерационная схема (3.45) является сходящейся и $\lim_{n \rightarrow \infty} \Psi^n = C\Psi$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = R(h, \tau)$, где C — некоторое положительное число.

Справедливость данного утверждения следует из того, что сходимость итерационного метода (3.45) гарантируется тем фактом, что $R(h, \tau)$ по модулю больше всех других собственных значений матрицы B^{-1} .

Замечание. С точки зрения численных расчетов итерационный процесс (3.45) реализуется достаточно просто, так как он требует вычисления и хранения в памяти ЭВМ коэффициентов матрицы B^{-1} , которая, согласно предложению 1, имеет около N^2 ненулевых элементов.

Вернемся к вопросу о численном интегрировании уравнения (3.32), которое запишем в следующем виде:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k(S) \frac{\partial S}{\partial x} \right) - V(x) f'(S) \frac{\partial S}{\partial x} = \frac{\partial S}{\partial t}, \quad (3.46)$$

где $k(S) = k_n(S)$, $f(S) = r'(S)$; начальные и краевые условия заданы соотношениями (3.33) и (3.34).

Аппроксимируем уравнение (3.46) чисто неявной схемой (аналогичной схеме (3.36)):

$$\begin{aligned} & \frac{1}{h} \left[\tilde{a}_{i+1}(S^{n+1}) \frac{S_{i+1}^{n+1} - S_i^{n+1}}{h} - \tilde{a}_i(S^{n+1}) \frac{S_i^{n+1} - S_{i-1}^{n+1}}{h} \right] - \\ & - V_i f'(S_i^{n+1}) \frac{S_i^{n+1} - S_{i-1}^{n+1}}{h} = \frac{S_i^{n+1} - S_i^n}{\tau}, \end{aligned} \quad (3.47)$$

где $\tilde{a}_i(S) = [K(S_i) + k(S_{i-1})]$; $S_i^n = S(x_i, t_n)$; $0 \leq i \leq N+1$; $S_i^0 = S_0(x_i)$; $S_0^n = S_{\min}$; $S_{N+1}^n = S_{\max}$.

На основании предложения 2 решение схемы (3.47) существует и единственно; с помощью итерационного процесса (3.45) можно подобрать такую разностную сетку $\bar{\omega}_{th}$, при которой выполняется необходимое условие устойчивости (спектральный радиус производной оператора $P(S^n)$ меньше единицы).

Для определения неизвестных значений сеточной функции $\hat{S}_h = (S_0^{n+1}, S_1^{n+1}, \dots, S_{N+1}^{n+1})$ на верхнем слое по времени $n+1$ в схеме (3.47) будем использовать метод простой итерации [18]:

$$\frac{1}{h} \left[\tilde{a}_{i+1}(S^k) \frac{S_{i+1}^{k+1} - S_i^{k+1}}{h} - \tilde{a}_i(S^k) \frac{S_i^{k+1} - S_{i-1}^{k+1}}{h} \right] - \\ - V_i f'(S_i^k) \frac{S_{i+1}^{k+1} - S_{i-1}^{k+1}}{h} = \frac{S_i^{k+1} - S_i}{\tau}, \quad (3.48)$$

где $k=0, 1, \dots$ — номер итерации; $S_i = S_i^n$ — значения сеточной функции S_h на нижнем слое по времени n ; $S_i^{k=0} = S_i$; $S_i^{k=0} = S_0(x_i)$, $S_0^{k+1} = S_{\min}$, $S_{N+1}^{k+1} = S_{\max}$.

Запишем схему (3.48) в виде

$$G(S^k, S^{k+1}) = 0, \quad (3.49)$$

где $G(S^k, S^{k+1})$ означает систему N скалярных функций, причем вектор $S^k = (S_1^k, S_2^k, \dots, S_N^k)$ при всех $k=0, 1, 2, \dots$ принадлежит N -мерному линейному пространству E с нормой

$$\|S^k\|_1 = \max_{1 \leq i \leq N} |S_i^k|.$$

Пусть R — оператор перехода схемы (3.49), т. е. R — отображение пространства E в E , так, что

$$S^{k+1} = R S^k. \quad (3.50)$$

Итерационный процесс (3.50) сходится, если R — сжимающее отображение. Пусть отображение R сильно дифференцируемо. Тогда

$$\|S^{k+1} - S^k\| = \\ = \|R S^k - P S^{k-1}\| \leq \max_{0 < \theta < 1} \|R'(S^{k-1} + \theta \Delta S)\| \|S^k - S^{k-1}\|.$$

Отсюда получаем, что при условии $\|R'(S^{k-1} + \theta \Delta S)\| < 1$ итерационный процесс (3.50) сходится. Как и при доказательстве предложения 2, имеем, что $R' = B^{-1}A$, где функциональные матрицы B и A определяются в следующем виде:

$$B = -\partial G / \partial S^{k+1} = \begin{bmatrix} c_1 & -\delta_1 & & 0 \\ -d_2 & c_2 & -\delta_2 & \\ & 0 & & \\ & & & \end{bmatrix}, \quad (3.51)$$

где $c_i = \tilde{a}_{i+1}(S^k) + \tilde{a}_i(S^k) + V_i f'(S^k)h + h^2/\tau$;

$\delta_i = \tilde{a}_{i+1}(S^k)$; $d_i = \tilde{a}_i(S^k) + V_i f'(S^k)h$;

причем $\tilde{a}_i(S^k) > 0$, $V_i f'(S^k) > 0$ при $1 \leq i \leq N$.

$$A = -\partial G / \partial S^k = \begin{bmatrix} a_1 & \beta_1 & & 0 \\ b_2 & a_2 & \beta_2 & \\ & 0 & & \\ & & & \end{bmatrix}, \quad (3.52)$$

где

$$a_i = \frac{\partial \tilde{a}_{i+1}(S^k)}{\partial S_i^k} (S_{i+1}^{k+1} - S_i^{k+1}) + \frac{\partial \tilde{a}_i(S^k)}{\partial S_i^k} (S_{i-1}^{k+1} - S_i^{k+1}) + \\ + V_i h \frac{\partial f'(S_i^k)}{\partial S_i^k} (S_{i-1}^{k+1} - S_i^{k+1});$$

$$\beta_i = \frac{\partial \tilde{a}_{i+1}(S^k)}{\partial S_{i+1}^k} (S_{i+1}^{k+1} - S_i^{k+1}); \quad b_i = \frac{\partial \tilde{a}_i(S^k)}{\partial S_{i-1}^k} (S_{i-1}^{k+1} - S_i^{k+1}).$$

Из определения элементов матрицы A видно, что при достаточно гладких функциях $\tilde{a}_i(S^k)$, $f'_i(S^k)$ и малом шаге h элементы a_i , b_i , β_i матрицы A имеют порядок $O(h)$ [10] (поскольку $|S_{i+1}^{k+1} - S_i^{k+1}| = O(h)$).

Предложение 3. Пусть в квазилинейном уравнении (3.46) коэффициенты $k(S)$, $V(x)$ принадлежат классу $C^{(1)}$, функция $f(S)$ принадлежит классу $C^{(2)}$ и, кроме того, $k(S) > 0$, $V(x) > 0$, $f' > 0$.

Тогда оператор перехода R в схеме (3.50) итерационного процесса (3.48) для нахождения решения чисто неявной схемы (3.47) имеет сильную производную и $\|R'\| \leq q$, где $q = \tau K/h$, K — некоторая константа. Если $q \leq 1$, то процесс (3.48) сходится.

Доказательство. Для производной отображения R имеем: $R' = B^{-1}A$, где функциональные матрицы B и A определены выражениями (3.51), (3.52). Поскольку $\|R'\| \leq \|B^{-1}\| \|A\|$, то достаточно оценить нормы матриц B^{-1} и A .

Функциональной матрице B отвечает линейное преобразование, отображающее N -мерное пространство E в себя. Из условий предложения 3 следует, что матрица B невырожденная, поскольку выполнено условие Адамара [2]: $c_i - (d_i + \delta_i) = h^2/\tau > 0$.

Рассмотрим неоднородное уравнение

$$By = F; y = (y_1, y_2, \dots, y_N), F = (f_1, f_2, \dots, f_N).$$

Пусть

$$\|y\| = \max_{1 \leq i \leq N} |y_i| = |y_k|.$$

Тогда

$$c_k y_k = d_k y_{k-1} + \delta_k y_{k+1} + f_k.$$

Из этого равенства получим

$$c_k |y_k| \leq d_k |y_{k-1}| + \delta_k |y_{k+1}| + |f_k| \leq (d_k + \delta_k) |y_k| + |f_k|.$$

Следовательно,

$$\frac{h^2}{\tau} \|y\| \leq \|F\| = \|By\|.$$

Отсюда получаем условие

$$\frac{h^2}{\tau} \leq \inf_{0 \neq y \in E} \frac{\|By\|}{\|y\|}. \quad (3.53)$$

Из определения нормы линейного преобразования имеем

$$\|B^{-1}\| = \sup_{0 \neq y \in E} \frac{\|B^{-1}y\|}{\|y\|} = \sup_{0 \neq y \in E} \frac{\|y\|}{\|By\|} = \left(\inf_{0 \neq y \in E} \frac{\|By\|}{\|y\|} \right)^{-1}.$$

Отсюда и из условия (3.53) получаем оценку сверху для нормы обратного преобразования B^{-1} :

$$\|B^{-1}\| \leq \tau/h^2. \quad (3.54)$$

Оценим теперь норму матрицы A . Из определения (3.52) элементов матрицы A имеем: $a_i = O(h)$, $\beta_i = O(h)$, $b_i = O(h)$.

Норма матрицы A , подчиненная равномерной норме вектора, равна

$$\|A\|_1 = \max_{1 \leq i \leq N} \sum_{k=1}^{k=N} |a_{ik}| = \max_{1 \leq i \leq N} (|a_i| + |b_i| + |\beta_i|) \leq Kh,$$

где K — некоторая константа.

Используя этот последний результат, а также оценку сверху нормы матрицы B^{-1} , получим

$$\|R'\| \leq \|B^{-1}\| \|A\| = \tau K/h.$$

Для доказательства последней части утверждения надо использовать теорему о сжатом отображении и формулу конечных приращений для оператора R :

$$\begin{aligned} \|S^{k+1} - S^k\| &= \|RS^k - RS^{k-1}\| \leq \\ &\leq \max_{0 < \theta < 1} \|R'(S^{k-1} + \theta \Delta S^k)\| \|\Delta S^k\| \leq q \|\Delta S^k\|, \end{aligned}$$

где $q = \tau K/h$, $\Delta S^k = S^k - S^{k-1}$. Предложение 3 доказано.

На основе разработанной выше теории созданы алгоритмы и комплексы прикладных программ для моделирования процессов формирования зоны проникновения.

3.4. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Вычисления проводились применительно к чистым коллекторам (песчаникам, известнякам и доломитам) с высокой пористостью (0,1—0,2) и проницаемостью (0,1—0,8 мкм²).

Согласно геофизическим исследованиям, скважины в коллекторах с указанными данными характеризуются глинистой коркой толщиной от 1 до 3 см и зоной проникновения от 3 до 5 радиусов скважины.

А. ТЕЧЕНИЕ ВЗАИМОСМЕШИВАЮЩИХСЯ ЖИДКОСТЕЙ

Параметры нестационарного процесса распределения насыщенности фильтра глинистого раствора в водоносном пласте и увеличение толщины глинистой корки на стенке скважины получены в результате численного решения системы уравнений (3.2), (3.3) при следующих предположениях.

1. Глинистый раствор в скважине находится в статическом состоянии (циркуляция раствора отсутствует).

2. Пористая среда (пласт) однородная и изотропная ($m=0,1, 0,2$).

3. На основе модели движения смешивающихся жидкостей рассматривается радиальное течение, когда непроницаемые границы пласта находятся на достаточно большом расстоянии (около 1 м) от оси скважины и в первом приближении (достаточно точном на стадии формирования зоны проникновения) можно пренебречь влиянием этих границ, а также влиянием силы тяжести. В этом случае приводимые ниже результаты справедливы как для вертикальных, так и горизонтальных скважин.

4. Проницаемость глинистой корки K_k равна 10^{-6} и 10^{-7} мкм².

5. Коэффициент эффективной диффузии

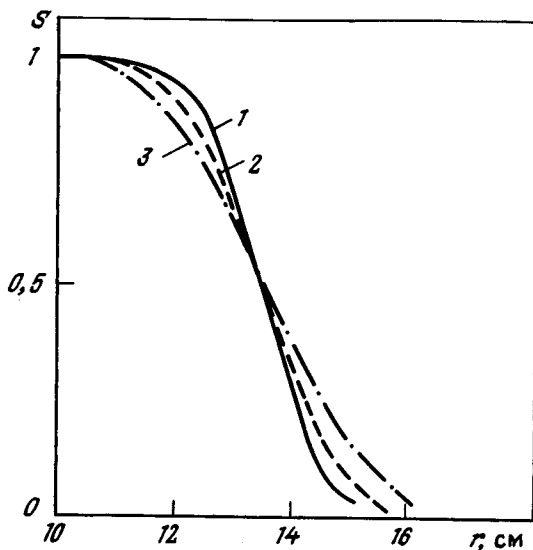
$$D^* = \left(\frac{m}{\tau} D_0 + 0,13V \right) [\text{см}^2/\text{ч}].$$

Точность численного решения существенно зависит от выбора и параметров разностной сетки. Во всех расчетах шаг по времени τ был переменным, равным 10^{-6} ч в начале процесса, когда распределение фильтрата имеет крутой фронт и перемещается с высокой скоростью благодаря конвективному переносу; по мере увеличения толщины глинистой корки скорость фильтрации уменьшается, и, вследствие влияния диффузии, фронт становится более пологим — шаг по времени увеличивается до значения 0,1 ч.

Влияние выбора пространственного шага h на форму кривой представлено на рис. 3.9: кривые 1 и 2 соответствуют аппроксимации уравнения (3.3) с помощью монотонной схемы второго порядка точности и с использованием разностного числа Рейнольдса [18]: кривая 1 для $h=0,01$ см, кривая 2 для $h=0,5$ см. Кривая 3 соответствует аппроксимации конвективного члена в уравнении (3.3) с помощью односторонней разностной производной (назад по потоку) для $h=0,5$ см. При $h=0,1$ см кривые 1 и 3 практически совпадают.

На рис. 3.10, а представлен характер распределения насыщенности фильтрата глинистого раствора, а на рис. 3.10, б — удельного электрического сопротивления $\rho_{\text{эл}}$ в зоне проникновения. Перепад давления в скважине и пласте $\Delta p = 0,5$ МПа, проницаемость глинистой корки $K_k = 10^{-7}$ мкм²,

Рис. 3.9. Влияние пространственного шага h на форму кривой водонасыщенности



радиус скважины $r_c = 10$ см. Кривые распределения удельного сопротивления (см. рис. 3.10, б) выполнены для пласта с пористостью $m = 0,2$ по формуле $\rho_n = p_n(m) \rho_{cm}(S)$.

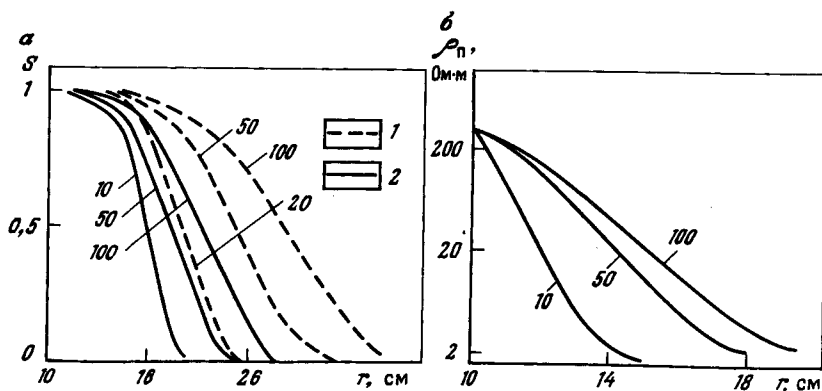


Рис. 3.10. Формирование зоны проникновения в водоносных пластах: а—распределение насыщенности фильтрата глинистого раствора в водоносном пласте: 1— $m=0,1$; 2— $m=0,2$. Шифр кривых—время проникновения фильтрата, ч; б—распределение удельного электрического сопротивления в водоносном пласте; шифр кривых—время проникновения фильтрата, ч

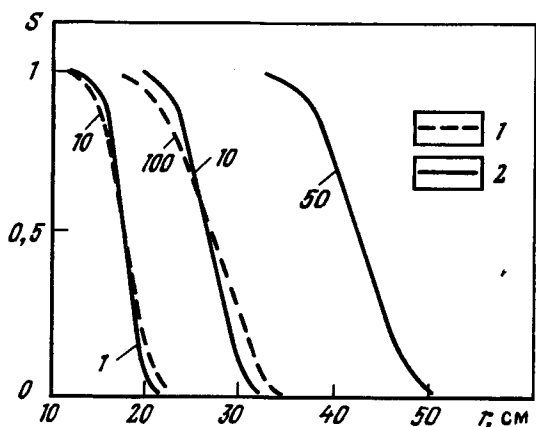


Рис. 3.11. Зависимость распределения насыщенности фильтрата от проницаемости глинистой корки.

1 — $K_k = 10^{-7}$ мкм²;
2 — $K_k = 10^{-6}$ мкм².
Шифр кривых — время проникновения фильтрата, ч

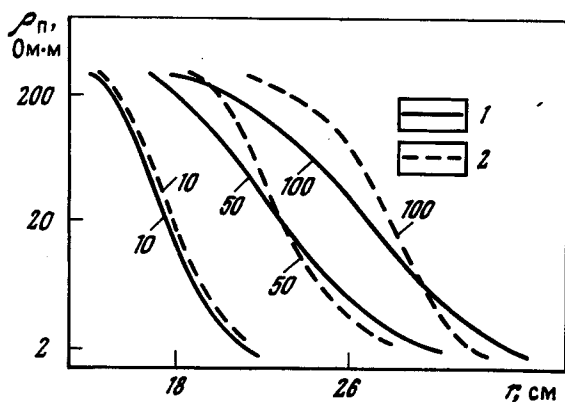


Рис. 3.12. Влияние молекулярной диффузии на распределение удельного электрического сопротивления в зоне проникновения.

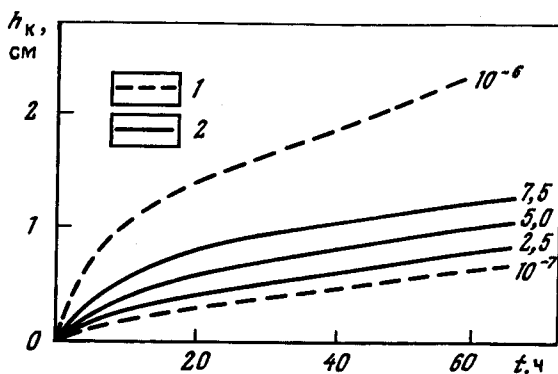
1 — $D_0 = 0,02$ см²/ч;
2 — $D_0 = 0,01$ см²/ч.
Шифр кривых — время проникновения фильтрата, ч

На характер распределения удельного сопротивления и насыщенности фильтрата в зоне проникновения существенно влияют время фильтрации и пористость пласта. Проницаемость пласта практически не влияет на процесс формирования зоны проникновения. Результаты численных расчетов, проведенных на основе использования модели течения смешивающихся жидкостей, позволяют сделать следующие выводы.

1. Глубина зоны проникновения зависит от проницаемости глинистой корки (рис. 3.11), пористости пласта, времени фильтрации и дифференциального давления (рис. 3.10, а, 3.12); пористость глинистой корки влияет на нее незначительно.

Рис. 3.13. Зависимость толщины глинистой корки от времени фильтрации при изменении:

1 — проницаемости глинистой корки K_x (перепад давления фиксирован; $\Delta p = 0,5$ МПа); 2 — перепада давления Δp . Шифры кривых — проницаемость, мкм²; перепад давления, МПа



2. Радиус зоны проникновения возрастает с увеличением проницаемости глинистой корки (см. рис. 3.11, 3.13).

3. При фиксированных значениях пористости и проницаемости глинистой корки радиус зоны проникновения уменьшается с ростом пористости коллектора (см. рис. 3.10, а).

4. Удельное сопротивление зоны проникновения плавно изменяется по радиусу (см. рис. 3.10, б и 3.12).

5. Скорость проникновения фильтрата раствора, высокая в начальный момент фильтрации, снижается с увеличением времени фильтрации и примерно через 300 ч становится меньше скорости диффузии солей. Вследствие этого граница между зоной проникновения и неизменной частью пласта перемещается к стенке скважины.

6. Толщина глинистой корки определяется в основном ее проницаемостью, дифференциальное давление на толщину корки влияет меньше (рис. 3.13). Наибольшая скорость роста наблюдается в начальный момент после вскрытия пласта и постепенно замедляется в ходе фильтрации. При изменении проницаемости глинистой корки от 10^{-12} до 10^{-11} мкм² толщина глинистой корки составляет (на момент времени $t = 100$ ч при $\Delta p = 0,5$ МПа) от 1 до 3,3 см, а при повышении дифференциального давления от 2,5 до 7,5 МПа (при фиксированной проницаемости глинистой корки $K_x = 10^{-7}$ мкм²) — увеличивается с 1 до 1,7 см. Рост глинистой корки, как и следовало ожидать, мало зависит от пористости и проницаемости коллектора.

Указанные характеристики формирования и расформирования зоны проникновения согласуются с результатами работ [5, 14].

Б. ТЕЧЕНИЕ НЕСМЕШИВАЮЩИХСЯ ЖИДКОСТЕЙ

Численные расчеты проводились с применением нелинейной неявной разностной схемы для аппроксимации уравнений (3.18), (3.19) и начально-краевых условий (3.1) и (3.27)—(3.30). Рассматривается нефтеносный пласт с функциями $k_n(S)$, $k_v(S)$, $p_{\text{кап}}(S)$, приведенными в работе [21]. Типичный вид этих функций, определяемых на основе обработки многочисленных экспериментальных данных, приведен на рис. 3.14.

Начальная водонасыщенность пласта принималась равной 0,3, конечная нефтеотдача равна 0,2; вязкость фильтрата 1 мПа · с, вязкость нефти 2 мПа · с, коэффициент абсолютной проницаемости пласта изменялся в диапазоне 0,1—0,5 мкм², пористость — от

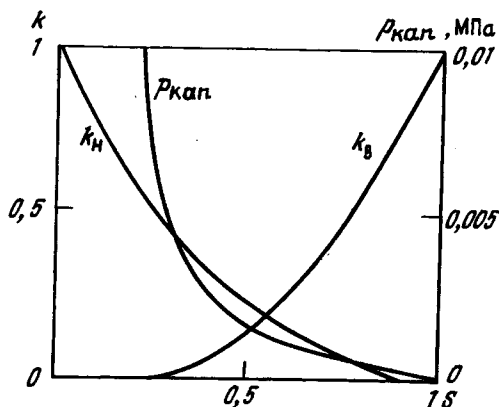


Рис. 3.14. Зависимость относительных фазовых проницаемостей k_n , k_v и капиллярного давления $p_{\text{кап}}$ от водонасыщенности в нефтеносном пласте

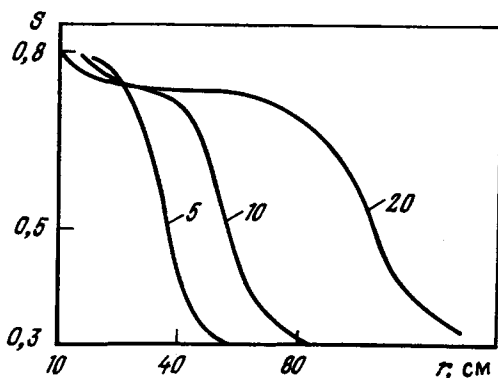


Рис. 3.15. Характер изменения водонасыщенности в радиальном направлении нефтеносного пласта при отсутствии глинистой корки на стенках скважины. Шифр кривых — время проникновения фильтрата, ч

Рис. 3.16. Характер изменения водонасыщенности в радиальном направлении при образовании глинистой корки.

1 — $K_k = 10^{-7}$ мкм², 2 — $K_k = 10^{-6}$ мкм². Шифр кривых — время проникновения фильтрата, ч

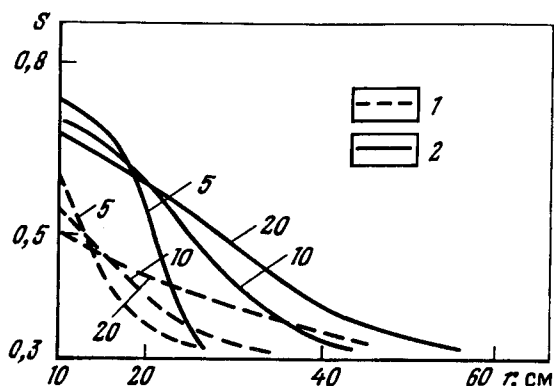


Рис. 3.17. Зависимость водонасыщенности от радиуса для различных значений капиллярного давления в нефтеносном пласте.

1 — высокое капиллярное давление; 2 — низкое капиллярное давление. Шифр кривых — время проникновения фильтрата, ч

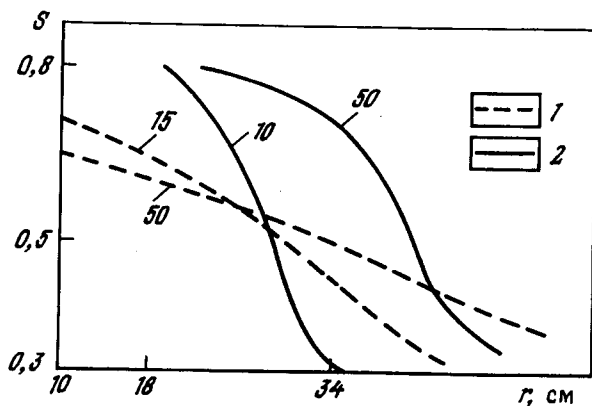
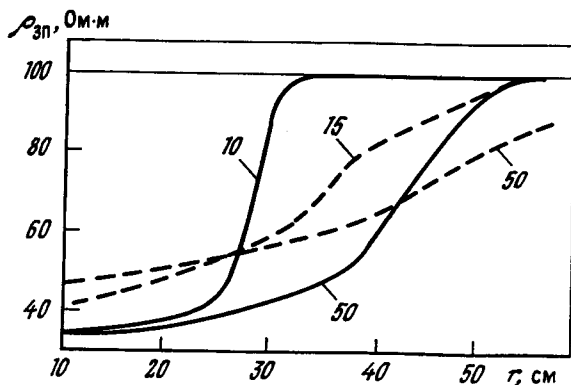


Рис. 3.18. Зависимость удельного сопротивления от радиуса в зоне проникновения нефтеносного пласта, отвечающая кривым распределения водонасыщенности на рис. 3.17.

Шифр кривых — время проникновения фильтрата, ч



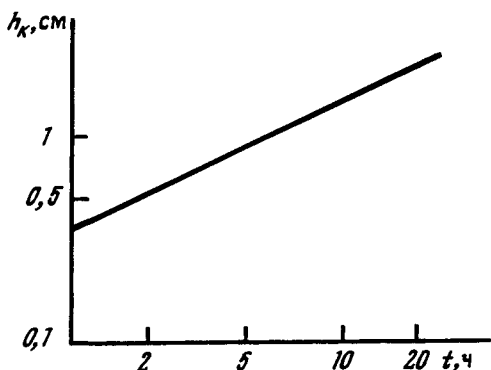


Рис. 3.19. Зависимость толщины глинистой корки от времени фильтрации

0,1 до 0,2, давление в пласте 10 МПа, проницаемость глинистой корки 10^{-6} — 10^{-7} мкм², пористость глинистой корки 0,3.

На рис. 3.15 приведены кривые распределения насыщенности фильтрата, полученные численно, в ситуации, когда на стенках скважины отсутствует глинистая корка (режим вытеснения нефти водой). Давление в скважине на 0,01 МПа превышает давление в нефтеносном пласте. Процесс характеризуется наличием в окрестности скважины промытой зоны, высокой скоростью повышения водонасыщенности и ее крутым фронтом.

Полученные при расчетах кривые, характеризующие процесс формирования зоны проникновения для различных значений коэффициентов проницаемости глинистой корки, показаны на рис. 3.16. Промытая зона возникает только в первые 1—2 ч после начала фильтрации, так как нарастающая глинистая корка способствует быстрой гидродинамической изоляции нефтеносного пласта от скважины, и дальнейшее изменение водонасыщенности происходит в основном за счет действия капиллярных сил.

Влияние капиллярных сил на процесс распределения водонасыщенности и удельного сопротивления в нефтеносном пласте представлено на рис. 3.17, 3.18. Кривые 1 соответствуют такому же капиллярному давлению, что и на рис. 3.14, кривые 2—уменьшенному в 10 раз.

На рис. 3.19 в двойном логарифмическом масштабе приведена зависимость толщины глинистой корки h_k на стенках скважины от времени фильтрации t для коэффициента прони-

цаемости глинистой корки $K_k = 10^{-6}$ мкм². Такое изменение толщины корки во времени отмечается в работе [16], где приведены экспериментальные данные по водоотдаче и коркообразующим свойствам глинистых растворов. Следует отметить, однако, что с увеличением перепада давления при температуре 150—200°С водоотдача некоторых растворов заметно отклоняется от линейного закона, и это следует учитывать при построении более точных математических моделей теории фильтрации.

3.5. ОДНОМЕРНЫЕ МОДЕЛИ ФОРМИРОВАНИЯ ЗОНЫ ПРОНИКНОВЕНИЯ В ОКРЕСТНОСТИ ГОРИЗОНТАЛЬНЫХ СКВАЖИН

Приведенные выше параметры зоны проникновения справедливы как для горизонтальных, так и вертикальных скважин при условии пренебрежения влиянием силы тяжести и границ пласта на процесс формирования. Рассмотрим теперь влияние каждого из факторов.

Образование зоны проникновения фильтрата промывочной жидкости в проницаемых пластах можно рассматривать как процесс, происходящий в два этапа.

Первый этап — поступление фильтрата промывочной жидкости при вскрытии пласта. Наиболее интенсивно фильтрат поступает в первые 1—5 часов после момента вскрытия пласта. Механизм течения на этом этапе обусловлен действием напорных сил под влиянием избыточного давления в скважине. Зону проникновения при этом достаточно точно можно описывать, применяя одномерные модели фильтрации многофазных жидкостей. Интенсивное образование глинистой корки способствует резкому замедлению поступления фильтрата в пласт. Количественное описание этого процесса должно быть включено в математическую модель первого этапа образования зоны проникновения.

Второй этап — распределение фильтрата промывочной жидкости в окрестности скважины после разбуривания пласта. Процесс фильтрации при этом обусловлен капиллярной пропиткой, действием гравитационных сил и диффузией. На этом этапе также могут быть использованы одномерные модели

многофазных течений, позволяющие исследовать влияние фазовых проницаемостей несмешивающихся жидкостей, капиллярного давления, непроницаемых кровли и подошвы пласта и других факторов.

Рассмотрим одномерную модель процесса формирования зоны проникновения в нефтеносном (газонасном пласте) в окрестности горизонтальной скважины. В первые 1—5 часов после вскрытия пласта зона проникновения имеет резкую границу перехода с неизменной частью пласта. За диаметр зоны проникновения L можно принять результат решения по одномерной модели течения, описывающей первый этап формирования зоны. В качестве модели, описывающей второй этап формирования, рассмотрим противоточную капиллярную пропитку при наличии двух непроницаемых границ: стенки скважины с глинистой коркой с одной стороны и кровли (или подошвы) пласта с другой стороны. Влиянием гравитационных сил будем пренебрегать.

Предполагается, что первоначально порода была заполнена несмачивающей фазой, зона проникновения представляет собой слой воды конечной толщины L в горизонтальном пласте. В таких условиях фильтрат промывочной жидкости как более смачивающая жидкость по мелким порам впитывается в породу, вытесняя менее смачивающую фазу (нефть, газ) по соседним крупным порам.

Механизм противоточной капиллярной пропитки описывается нелинейным уравнением типа Раппопорта — Лиса:

$$m \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(R(S) p'_{\text{кап}}(S) \frac{\partial S}{\partial x} \right) = 0,$$

$$\text{где } R(S) = \frac{k_n(S) k_v(S)}{k_n(S) + k_v(S)}; \quad k_v(s) = \frac{K}{\mu_v} \left[\frac{S - \underline{S}}{\bar{S}} \right]^3; \quad S = S_v;$$

$$k_n(S) = \frac{K}{\mu_n} \left[\frac{\bar{S} - S}{\bar{S} - \underline{S}} \right]^3;$$

$$p_{\text{кап}}(S) = A \left[0,0072 \left[\frac{1}{\bar{S}} - \frac{1}{S} \right] + 0,5 (\bar{S} - S) \right];$$

$\underline{S}$ — остаточная водонасыщенность пласта, $\bar{S}$ — водонасыщенность, при которой несмачивающая фаза становится неподвижной; при этом всегда выполняется условие $\bar{S} > \underline{S}$.

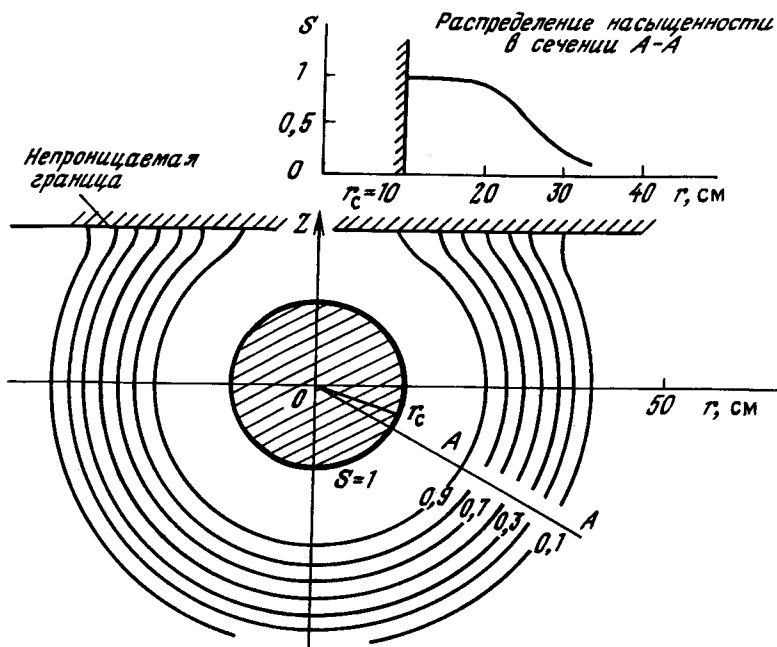


Рис. 3.20. Распределение насыщенности фильтрата в зоне проникновения водонасыщенного пласта на момент времени $t=100$ ч после вскрытия пласта горизонтальной скважиной:
 $m=0,1$; $K_x=10^{-7}$ мкм², $K=0,1$ мкм²

На непроницаемых стенках ($x=0, H$) ставятся условия равенства нулю нормальной к стенке скорости фильтрации:

$$\left. \frac{\partial S}{\partial x} \right|_{x=0, H} = 0,$$

где H — толщина пласта.

Уравнение Раппопорта — Лиса с данными краевыми условиями решают методом конечных разностей.

Аналогично формулируется задача о динамике зоны проникновения в водонасыщенной части пласта на основе нестационарного уравнения диффузии.

На рис. 3.20 представлено пространственное распределение насыщенности фильтрата в зоне проникновения водоносного пласта-коллектора в окрестности скважины, расположенной вблизи непроницаемой кровли пласта. Результаты

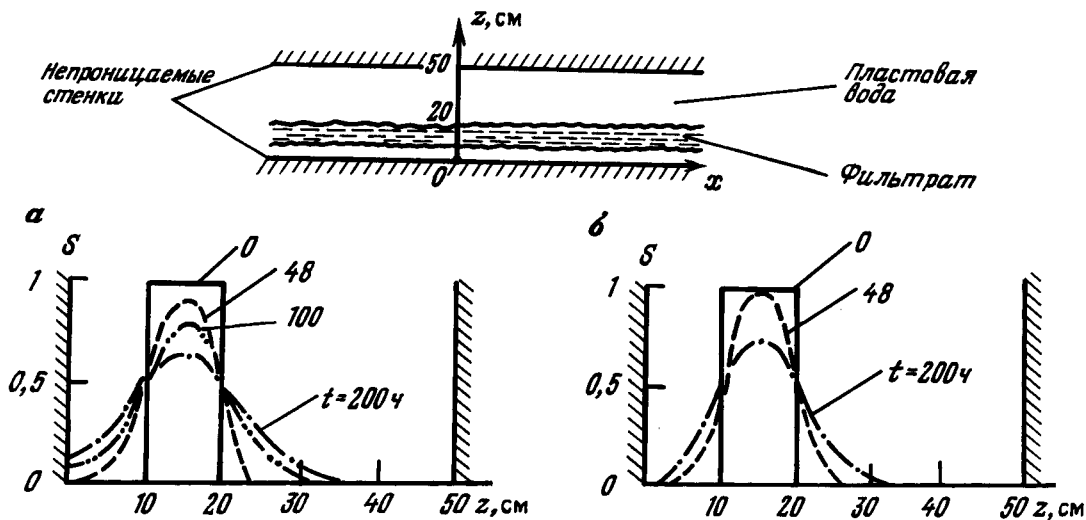


Рис. 3.21. Влияние параметров пласта на диффузионный процесс расформирования зоны проникновения вблизи непроницаемых стенок:
а — $m=0,1$; $K=0,1 \text{ мкм}^2$; $D=0,01 \text{ см}^2/\text{ч}$; б — $m=0,3$; $K=0,1 \text{ мкм}^2$; $D=0,02 \text{ см}^2/\text{ч}$. Шифр кривых — время расформирования, ч

математического моделирования показывают, что при вытеснении пластовой воды фильтратом промывочной жидкости в области, прилегающей к стенке скважины, образуется промытая зона, в которой фильтрат полностью вытеснил пластовую воду. В зоне смешения фильтрата и пластовой воды происходит плавное изменение функции насыщенности фильтрата, четкий фронт проникновения наблюдается только при времени $t \approx 10$ ч после момента вскрытия пласта. Непроницаемая горизонтальная кровля (подошва) пласта ограничивает распространение зоны проникновения. Интересно отметить, что результаты исследования более сложных многомерных моделей зоны проникновения горизонтальных скважин показывают уменьшение толщины глинистой корки на стенках скважины в направлении к ближайшей непроницаемой границе пласта. Такое неравномерное нарастание глинистой корки на стенках происходит благодаря уменьшению градиента давления в данном направлении пласта.

На рис. 3.21 показаны профили распределения насыщения фильтрата для различных моментов времени процесса диффузии в водоносном пласте конечной толщины. При этом предполагается, что фильтрат из скважины не поступает из-за образования и уплотнения глинистой корки на стенках скважины. Поскольку конвективный перенос фильтрата в пласте в этом случае отсутствует, изменение насыщенности фильтрата обусловлено процессом молекулярной диффузии.

Для инженерной оценки влияния молекулярной диффузии на изменение насыщенности фильтрата в водоносном пласте можно использовать следующее соотношение, дающее зависимость ширины переходной зоны, в которой насыщенность меняется от начального значения до некоторого малого значения, от времени:

$$\Delta x = 4 [D_0 t / \tau]^{1/2}.$$

Из последнего соотношения находим, что за время, равное 100 ч, ширина фронта зоны проникновения увеличивается примерно на 6,2 см при температуре пласта $T \approx 290$ К (при $T \approx 373$ К ширина фронта $\Delta x \approx 6,2 \cdot 2,6 = 16,12$ см). Для сравнения приведем оценку действия гравитационных сил в зоне проникновения, когда плотности фильтрата и пластовой воды различны. Из уравнения движения двухкомпонентной смеси

в пористой среде получим следующую оценку величины подъема (опускания) фильтра в пласте:

$$z = -\frac{K}{\mu t} g \Delta \rho t,$$

где $\Delta \rho$ — разность плотностей фильтра и пластовой воды; данное соотношение получено при условии, что на каждый элемент объема смеси действует максимальная выталкивающая сила.

Оценим величину z для значений параметров $K=0,1$ мкм², $m=0,2$. Из последнего соотношения находим, что максимальное перемещение фильтра по вертикали происходит на 3,6 см за промежуток времени, равный 10 ч. Отсюда видно, что в некоторых случаях степень влияния молекулярной диффузии на процесс расформирования зоны проникновения может быть одного порядка с действием гравитационных сил.

В коллекторах нефти и газа относительно быстро на первом этапе формирования зоны проникновения образуется промытая зона в области, прилегающей к стенке скважины, где водонасыщенность почти неизменна. По мере снижения скорости поступления фильтра промывочной жидкости режим вытеснения на первом этапе формирования зоны проникновения переходит в режим противоточной капиллярной пропитки. В зависимости от проницаемости глинистой корки и пористости пласта радиус промытой зоны $r_{пз}$ составляет примерно $(2-3) r_c$ (r_c — радиус скважины).

После достижения максимальных значений водонасыщенности в промытой зоне начинается постепенное уменьшение водонасыщенности, соответствующее началу стадии расформирования зоны проникновения в нефтеносном пласте (рис. 3.22 и 3.23). Из этих рисунков видно, что обе стадии процесса характеризуются крутым фронтом проникновения фильтра, в согласии с результатами экспериментальных и теоретических исследований Н. Н. Михайлова (1987).

Анализ процесса внедрения фильтра глинистого раствора в нефтегазонасыщенные пласты позволяет сделать следующие выводы:

1) на первом этапе формирования зоны проникновения, когда вблизи поверхности скважины доминируют напорные силы, в качестве математической модели может быть принята

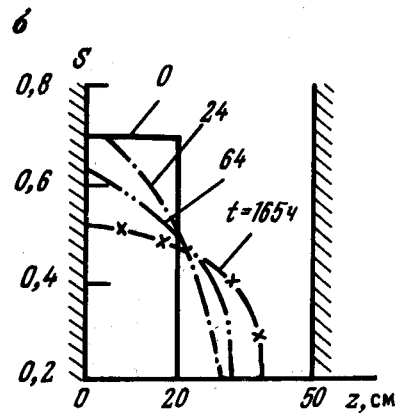
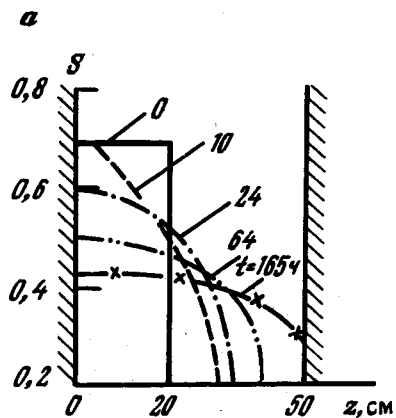
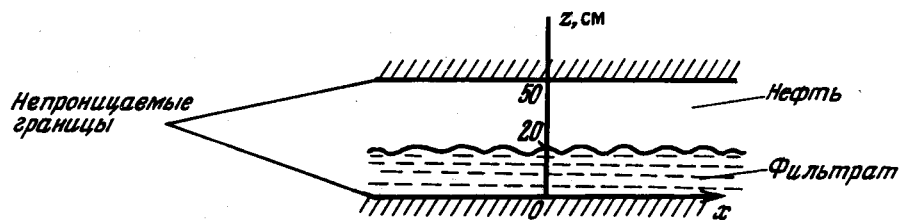


Рис. 3.22. Профили водонасыщенности в зоне проникновения нефтеносного пласта вблизи непроницаемой границы. $A=0,1$; $K=0,1$ мкм²;

$a-m=0,1$; $b-m=0,3$. Шифр кривых — время расформирования, ч

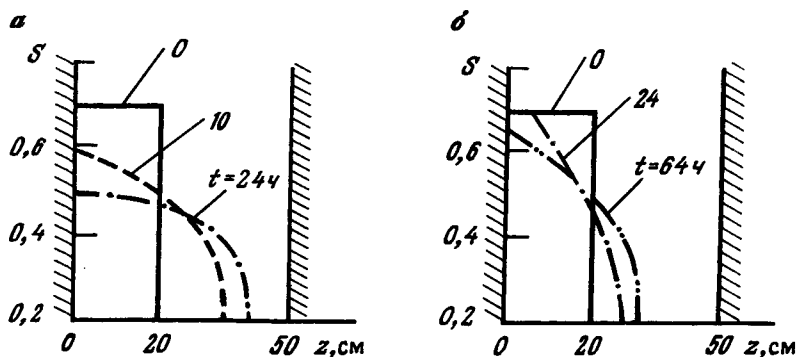


Рис. 3.23. Влияние параметров нефтеносного (газососного) пласта на профили водонасыщенности в зоне проникновения. $A=0,3$; $m=0,1$:
 $a-K=0,1$ мкм²; $b-K=0,01$ мкм². Шифр кривых — время расформирования, ч

модель течения смешивающихся жидкостей с учетом образования и увеличения толщины глинистой корки на стенках скважины;

2) на втором этапе (при расформировании) в гидрофильных нефтегазососных пластах изменение насыщенности фильтра в зоне проникновения происходит сравнительно быстро благодаря механизму капиллярной пропитки (фронт насыщенности фильтра перемещается примерно на 15—20 см за 30 ч);

3) динамика процесса расформирования зоны проникновения практически не зависит от толщины пласта; фронт зоны проникновения перемещается внутри пласта, приобретая форму скачка насыщенности фильтра;

4) скорость изменения насыщенности фильтра при капиллярной пропитке значительно превосходит скорости процессов, определяемых диффузией и действием гравитационных сил;

5) специально проводились исследования влияния срыва глинистой корки в результате спуско-подъемных операций на профили фильтратонасыщения в зоне проникновения. Было установлено, что каждый полный срыв глинистой корки со стенок скважины приводил к перемещению данного профиля в радиальном направлении всего на 1—3 см, поскольку образование новой глинистой корки способствует быстрому затуханию фильтрации в зоне проникновения.

Следует отметить, что постановка задачи формирования зоны проникновения на основе течения смешивающихся жидкостей справедлива для описания процесса только на начальном этапе формирования, когда толщина глинистой корки еще не велика и доминируют напорные силы. Данный период составляет примерно 1—10 ч от момента вскрытия пласта. Для более позднего периода, когда поступление фильтрата через глинистую корку практически прекращается, при течении смешивающихся жидкостей (например, в водонасыщенной части пласта) доминируют гравитационные силы и процессы молекулярной диффузии.

Результаты численного моделирования процесса формирования зоны проникновения могут быть использованы при составлении проектов разработки нефтеносных пластов, оценки их пористости, проницаемости, остаточной водо- и нефтенасыщенности, подсчета запасов углеводородного сырья.

В ряде районов возникает необходимость в доразведке нефтяных месторождений, при которой следует принимать во внимание длительность и характер процесса формирования и расформирования зон проникновения. На основе изучения процессов перераспределения флюидов в прискважинной зоне могут быть даны обоснованные оценки времени проведения каротажных работ в скважине после бурения, а также рекомендации по выбору оптимальных параметров каротажной аппаратуры.

Влияние процесса формирования зоны проникновения на диэлектрический каротаж с помощью установок стационарного тока рассматривается в следующих главах.

ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ЗОНДЫ С ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ АНТЕННОЙ РЕШЕТКОЙ ДЛЯ АЗИМУТАЛЬНОГО ИССЛЕДОВАНИЯ ОКОЛОСКВАЖИННЫХ ЗОН

Прогресс в технологии горизонтального бурения нефтегазовых скважин определяет развитие новых теоретических проблем и методик геофизических исследований скважин (ГИС), связанных прежде всего с проводкой горизонтальных скважин и оценкой фильтрационно-емкостных свойств коллекторов. В отличие от вертикальных скважин, когда геометрия и физические процессы в приствольном пространстве, как правило, имеют азимутальную симметрию относительно оси скважины, физические модели для горизонтальных скважин являются трехмерными.

В данной главе рассматриваются теоретические основы применения новых типов электромагнитных зондов, обладающих пространственно направленной диаграммой излучения. Такие зонды необходимы при проводке горизонтальных скважин сложного профиля для определения положения долота относительно кровли и подошвы пласта в процессе бурения, определения электрофизических параметров неоднородных околоскважинных зон, коэффициентов анизотропии пласта и трещиноватости горных пород [4, 5].

Конструкция зонда представляет собой металлическую цилиндрическую трубу кругового поперечного сечения с диаметром около 100—180 мм и длиной 2,5 м [рис. 4.1]. Цилиндрическая антенная решетка состоит из совокупности приемопередающих элементов, периодически расположенных на поверхности зонда по азимуту на окружности каждого заданного поперечного сечения зонда, а также вдоль образующей зонда. В простейшем случае в качестве приемопередающих элементов могут служить либо короткие щели, прорезанные

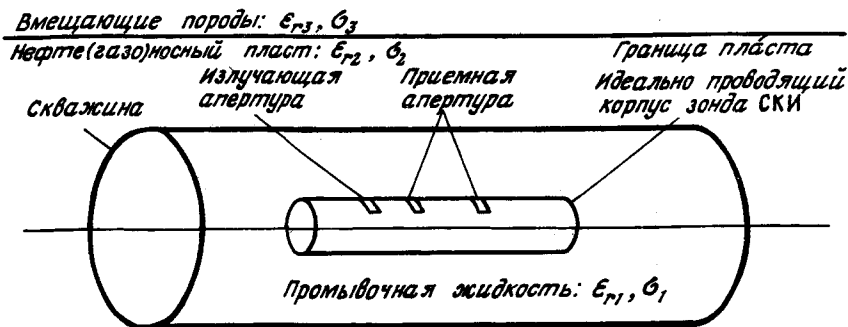


Рис. 4.1. Зонд сверхкоротких электромагнитных импульсов (зонд СКИ) в горизонтальных нефтегазовых скважинах

в металлической поверхности зонда, либо элементарные электрические вибраторы, расположенные вблизи поверхности зонда. Возбуждая передающий элемент током высокой частоты порядка 1 ГГц или сверхкоротким электромагнитным импульсом длительностью $\approx 10^{-9}$ с, получим пространственную направленную диаграмму излучения.

Следует заметить, что принципиальным ограничением высокочастотного метода зондирования является сильная зависимость глубины проникновения электромагнитного поля в окружающие горные породы от их проводимости.

Существенное увеличение глубины исследования околоскважинного пространства достигается применением электромагнитных зондов со сверхкоротким импульсным возбуждением (зонды СКИ) длительностью примерно 10^{-10} — 10^{-9} с. Широкополосность столь коротких импульсов обеспечивает глубину проникновения (около 1—3 м) в среды с большими потерями с проводимостью $\sigma \approx 10$ См/м и высокую разрешающую способность (не менее 0,05 м) при исследовании неоднородной среды (для $\sigma < 1$ См/м глубина исследования и разрешающая способность метода резко возрастают). Кроме того, высокочастотная часть спектра передающей антенны служит для обострения излучаемого импульса, что необходимо для того, чтобы его амплитуда уменьшилась до требуемого низкого уровня к моменту прихода к приемной антенне слабого отраженного импульса [1, 14].

К сожалению, серьезная трудность заключается в том, что большинство сред и материалов, с которыми приходится

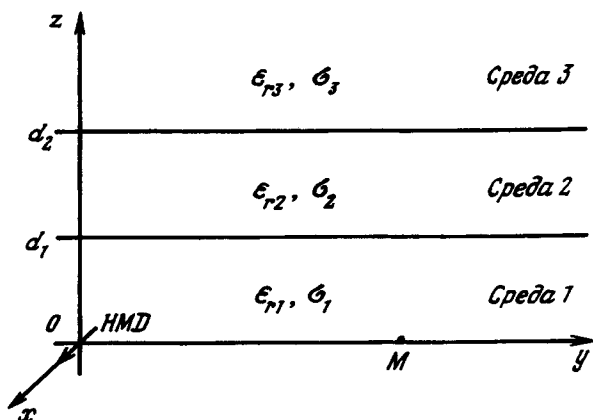


Рис. 4.2. Математическая модель зонда СКИ

иметь дело на практике, характеризуются сильной дисперсией электромагнитных волн. При этом степень поглощения и фазовая скорость электромагнитных волн в значительной степени зависят от частоты. Другая трудность при изучении геологических объектов состоит в том, что сами электромагнитные параметры горных пород могут зависеть от частоты [13].

Целью данной главы является теоретическое исследование распространения коротких импульсов, излучаемых магнитными или электрическими диполями, находящимися на боковой поверхности зондов, в неоднородных околоскважинных пространствах нефтегазоносных пластов. Рассматривается полубесконечная плоская слоисто-неоднородная среда с диэлектрической проницаемостью слоев $\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r$, где ε_0 — диэлектрическая проницаемость вакуума, $\varepsilon_r = 4 \div 80$, проводимость слоев $\sigma \approx 10^{-3} \div 10$ См/м, толщина каждого слоя $h = 0,01 - 0,1$ м, глубина исследования сравнительно невелика и составляет около 1—3 м. Данные параметры характерны для околоскважинных зон в нефтегазоносных пластах.

Исследуем математическую модель зонда СКИ, состоящую из полубесконечной среды, ограниченной с одной стороны бесконечной идеально проводящей плоскостью, в которой прорезаны узкие возбуждающая и приемная щели [рис. 4.2]. Все щели расположены на одной прямой (ось oy), проходящей перпендикулярно через середины щелей, причем предполагает-

ся, что все щели электродинамически изолированы друг от друга со стороны, противоположной слоисто-неоднородной среде.

Согласно электродинамическому принципу эквивалентности, излучение из щели, прорезанной в идеально проводящей поверхности, можно заменить действием линейного магнитного тока, приложенного к идеально проводящей поверхности [10]. Предполагая, что нить магнитного тока бесконечно протяженная и имеет синфазное возбуждение по всей длине, воспользуемся двумерной теорией (2D) распространения электромагнитного импульса в среде. В том случае, когда длина нити бесконечно мала, применяется трехмерная теория (3D) излучения горизонтального магнитного диполя в многослойной среде.

4.1. ДВУХМЕРНЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ИМПУЛЬСОВ

А. АНАЛИТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ДЛЯ ОДНОРОДНЫХ ПОЛУПРОСТРАНСТВ

Пусть в однородной полубесконечной среде с произвольными электрическими параметрами ϵ_r , σ действуют нестационарные источники: сторонние электрические $\vec{J}^e(M, t)$ или магнитные $\vec{J}^m(M, t)$ токи, где $M = (x, y, z)$ — произвольная точка трехмерного пространства в декартовой системе координат; t — время. Ниже представим и исследуем ряд практически важных вариантов задания нестационарных источников.

Применение преобразования Лапласа

$$\vec{U}(M, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha - i\infty}^{\alpha + i\infty} e^{pt} \vec{U}(M, p) dp, \quad \alpha = \text{const} > 0,$$

$$\vec{U}(M, p) = \int_0^\infty e^{-pt} \vec{U}(M, t) dt, \quad U = E, H, J^m, J^e$$

к уравнениям Максвелла по переменной времени дает:

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\mu p \vec{H} - \vec{J}^{\text{м}}(M, p),$$

$$\operatorname{rot} \vec{H} = -p \epsilon \vec{E} + \vec{J}^{\text{э}}(M, p),$$

где $\epsilon = \epsilon(p) = \epsilon_0 \epsilon_r + \sigma/p$; $\mu = \mu_0$; ϵ_0, μ_0 — диэлектрическая и магнитная проницаемости вакуума; ϵ_r, σ — относительная диэлектрическая проницаемость и проводимость (в См/м) среды; $p = \alpha - i\omega$ — переменная преобразования Лапласа; $\vec{J}^{\text{э,м}}(M, p)$ соответствуют изображениям электрических или магнитных сторонних токов, являющихся источником поля и задаваемых как функции переменной времени.

Введем электродинамические векторные потенциалы $\vec{A}^{\text{э}}$ и $\vec{A}^{\text{м}}$, соответствующие электрическим и магнитным сторонним токам. Напряженности электрического и магнитного поля выражаются через эти векторные потенциалы:

$$\vec{E} = -p \mu \vec{A}^{\text{э}} + \frac{1}{\epsilon p} \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{A}^{\text{э}} - \operatorname{rot} \vec{A}^{\text{м}},$$

$$\vec{H} = -p \epsilon \vec{A}^{\text{м}} + \frac{1}{\mu p} \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{A}^{\text{м}} + \operatorname{rot} \vec{A}^{\text{э}}.$$

Для каждого векторного потенциала справедливо уравнение Гельмгольца:

$$\Delta \vec{A}^{\text{э}} + k^2 \vec{A}^{\text{э}} = -\vec{J}^{\text{э}},$$

$$\Delta \vec{A}^{\text{м}} + k^2 \vec{A}^{\text{м}} = -\vec{J}^{\text{м}},$$

где $k^2 = -\mu \epsilon p^2$; $\operatorname{Im} k > 0$.

Отсюда, используя функцию Грина однородного пространства

$$G(M, M') = \frac{\exp[ikR(M, M')]}{R(M, M')},$$

$$\text{где } R(M, M') = [(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2]^{1/2},$$

находим общий вид изображений Лапласа векторных потенциалов в произвольной точке M трехмерного однородного изотропного пространства:

$$\vec{A}^{\text{э,м}}(M, p) = \frac{1}{4\pi} \iiint \vec{J}^{\text{э,м}}(M', p) G(M, M') dx' dy' dz'.$$

Объемная плотность стороннего тока задана в виде:

$$\vec{J}^{\text{э,м}}(M, t) = \vec{F}^{\text{э,м}}(M) \cdot \frac{\partial m(t)}{\partial t}.$$

Откуда имеем:

$$\vec{J}^{\text{э,м}}(M, p) = p \, m(p) \cdot \vec{F}^{\text{э,м}}(M).$$

Здесь $\vec{F}^{\text{э,м}}(M)$ соответствует пространственному распределению возбуждающего тока электрического или магнитного типов; $m(t)$ — дипольный момент стороннего источника (электрического или магнитного типов) с заданной зависимостью от времени t . Функция $m(p)$ является изображением Лапласа функции источника:

$$m(p) = \int_0^{\infty} m(t) \exp(-pt) \, dt.$$

Рассматриваются различные функции возбуждения источника и их изображения:

1) δ -импульс:

$$m(t) = m_0 \delta(t), \quad m_0 = \text{const},$$

$$m(p) = m_0.$$

2) Режим включения монохроматического источника частоты f и амплитуды m_0 , которому соответствует изображение Лапласа вида

$$m(p) = m_0 / (p - p_0),$$

$$m_0 = \text{const}, \quad p_0 = -i\omega_0, \quad \omega_0 = 2\pi f.$$

3) Импульс прямоугольной формы длительности τ и амплитуды m_0 :

$$m(t) = m_0 \begin{cases} 1, & 0 < t < \tau \\ 0, & t < 0 \text{ или } t > \tau \end{cases}$$

$$m(p) = m_0 [1 - \exp(-p\tau)] / p. \quad (4.1)$$

4) Импульс гауссового вида:

$$m(t) = m_0 \exp[-\beta^2(t - \tau_0)^2], \quad \beta, \tau_0, m_0 = \text{const},$$

с изображением

$$m(p) = m_0 \frac{\sqrt{\pi}}{2\beta} \exp \left[\left(\frac{p}{2\beta} \right)^2 - p\tau_0 \right] \operatorname{erfc} \left(\frac{p}{2\beta} - \beta\tau_0 \right), \quad (4.2)$$

где

$$\operatorname{erfc}(z) = 1 - \operatorname{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_z^{\infty} \exp(-z^2) dz.$$

Здесь m_0 означает амплитуду импульса, τ_0 отвечает времени, при котором достигается максимум излучаемого сигнала, значение параметра β определяет эффективную «ширину» во времени сигнала (очевидно, чем β меньше, тем шире во времени излучаемый сигнал).

Введем в рассмотрение нормированные величины:

$$\tilde{p} = p/c, \quad \tilde{t} = tc, \quad \varepsilon(p) = \varepsilon(\tilde{p})/c, \quad \varepsilon(\tilde{p}) = [c\varepsilon_0\varepsilon_r + \sigma/\tilde{p}],$$

$$k(p) = k(\tilde{p}) = i[\tilde{p}(\tilde{p}\varepsilon_r + \eta_0\sigma)]^{1/2},$$

$$\text{где } c = (\mu_0\varepsilon_0)^{-1/2} \text{ — скорость света; } \eta_0 = (\mu_0/\varepsilon_0)^{1/2}.$$

При введении нормированных величин, т. е. при замене $\tilde{p} = p/c$, $\tilde{t} = tc$, все параметры, входящие в изображение функции источника $m(p)$, также преобразуются:

$$\tilde{\tau} = \tau c, \quad \tilde{\beta} = \beta/c, \quad \tilde{\tau}_0 = \tau_0 c, \quad \tilde{p}_0 = p_0/c, \quad \tilde{m}_0 = m_0 c,$$

$$m(p) = \tilde{m}(\tilde{p})/c^2.$$

где, например для прямоугольного импульса,

$$\tilde{m}(\tilde{p}) = \tilde{m}_0 [1 - \exp(-\tilde{p}\tilde{\tau})]/\tilde{p}.$$

Для определенности положим амплитуду импульса в нормированном виде равной единице: $\tilde{m}_0 = 1$.

Распространение электромагнитных импульсов будем исследовать в полубесконечной плоской слоисто-неоднородной диссипативной среде с границами разделов сред Γ_1 , Γ_2 и т. д., представляющими собой бесконечные параллельные плоскости. Эта среда ограничена с одной стороны бесконечной идеально проводящей плоскостью, которая предполагается параллельной поверхностям разделов сред. Введем декартову систему координат таким образом, чтобы идеально проводящая плоскость совпадала с плоскостью $z=0$, а поверхности разделов сред совпадали с плоскостями $z=d_1$ (плоскость Γ_1), $z=d_2$ (плоскость Γ_2) и т. д. ($0 \leq d_1 \leq d_2$). Например, в случае трехслойной среды в выбранной системе координат среде 1 будет соответствовать область $0 < z < d_1$; среде 2 — область

$d_1 < z < d_2$; среде 3 — область $z > d_2$ [см. рис. 4.2]. Ниже мы ограничимся рассмотрением случаев одно-, двух-, и трехслойных сред. Электрические параметры среды j обозначим

$$\epsilon_0 \epsilon_{r,j}, \sigma_j, \mu_j = \mu_0, j = 1, 2, \dots$$

Будет рассмотрен ряд двумерных (2D) и трехмерных (3D) моделей, отвечающих различным вариантам задания пространственного распределения функции источника.

1. Модели 2D.

В этих моделях электромагнитный импульс генерируется бесконечной нитью магнитного либо электрического тока с неизменными амплитудой и фазой вдоль всей ее длины. Нить проходит в среде 1 вблизи (на расстоянии $0 < h < d_1$) от идеально проводящей плоскости $z=0$ параллельно оси координат x . Очевидно, в данной постановке решение задачи не будет зависеть от координаты x и задача будет двумерной:

1.1) бесконечная нить магнитного тока:

$$\vec{F}^m(M) = \vec{e}_x \delta(z-h) \delta(y);$$

1.2) бесконечная нить электрического тока:

$$\vec{F}^e(M) = \vec{e}_x \delta(z-h) \delta(y).$$

2. Модели 3D.

В этих моделях электромагнитный импульс генерируется диполями магнитного либо электрического типов, направленными параллельно оси координат x — горизонтальный диполь (по отношению к идеально проводящей плоскости и поверхностям разделов сред) или параллельно оси координат z — вертикальный диполь, и расположенными в среде 1 вблизи (на расстоянии $0 < h < d_1$) от идеально проводящей плоскости $z=0$. Это

горизонтальный магнитный диполь (HMD):

$$\vec{F}^m(M) = \vec{e}_x \delta(z-h) \delta(x) \delta(y);$$

горизонтальный электрический диполь (HED):

$$\vec{F}^e(M) = \vec{e}_x \delta(z-h) \delta(x) \delta(y);$$

вертикальный магнитный диполь (VHD):

$$\vec{F}^m(M) = \vec{e}_z \delta(z-h) \delta(x) \delta(y);$$

вертикальный электрический диполь (VED):

$$\vec{F}^e(M) = \vec{e}_z \delta(z-h) \delta(x) \delta(y).$$

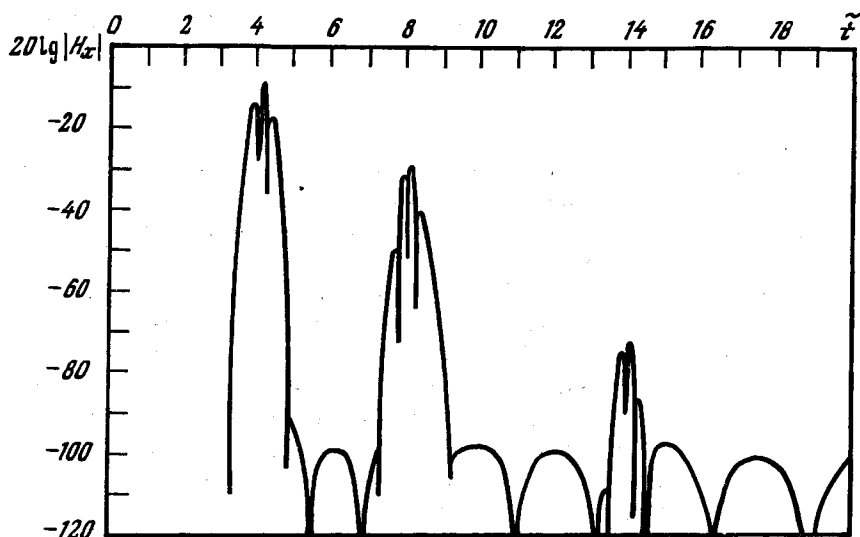


Рис. 4.3. Отклик компоненты поля H_x на воздействие гауссовым импульсом магнитного диполя $m_0 = 1/\text{с}$ в двухслойной среде:

$\epsilon_{r1} = 40$, $\sigma_1 = 0,1 \text{ См/м}$; $\epsilon_{r2} = 4$, $\sigma_2 = 0,01 \text{ См/м}$, толщина слоя $d = 0,5 \text{ м}$. Точка наблюдения $M(0, y_m, 0)$ фиксирована при $y_m = 0,5 \text{ м}$, время $t = c t_{\text{sec}}$ ($c = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с}$).

На рис. 4.3 представлен отклик поля H_x на возбуждение гауссовым импульсом магнитного дипольного момента $e_x m(t) \delta(R)$ с параметрами $\beta = 5$, $\tilde{t}_0 = 1$ в двухслойной среде с $\epsilon_{r1} = 40$, $\sigma_1 = 0,1 \text{ См/м}$; толщина первого слоя $z = d = 0,5 \text{ м}$; параметры второго полубесконечного слоя $\epsilon_{r2} = 4$, $\sigma_2 = 0,01 \text{ См/м}$. Время прихода фронта прямого и отраженного сигналов вычисляется по формуле $t_{\text{sec}} = R/v = R \sqrt{\epsilon_r}/c$. Прямой импульс проходит по среде 1 и имеет максимальную амплитуду в момент времени $\tilde{t} \approx 4$ в точке наблюдения $M = (0, y_m, 0)$, $y_m = 0,5 \text{ м}$. Импульс, однократно отраженный от границы раздела двух сред, достигает точки M в момент времени $\tilde{t} \approx 8$. Импульс, двукратно отраженный от границы раздела двух сред, достигает точки M в момент времени $\tilde{t} \approx 14$. Отсюда видно, что наличие ряда максимумов в отклике двухслойной среды является явным признаком ее слоистости. Кроме того, анализ фазовой скорости и амплитуды импульсов позволяет оценить электрические параметры и толщину слоев.

В однородном 3D пространстве ($-\infty < x < \infty$, $-\infty < y < \infty$, $-\infty < z < \infty$, ϵ_r , $\sigma = \text{const}$) изображение векторного потенциала электрического или магнитного типа, соответствующего диполю, находящемуся в точке $M_0 = (0, 0, h)$ и ориентированному либо вдоль оси x либо вдоль оси z , имеет вид:

$$\vec{A}^{m,z}(M, p) = \frac{pm(p)}{4\pi} \vec{e}_{x,z} \iiint \delta(z' - h) \delta(x') \delta(y') G(M, M') \times \\ \times dx' dy' dz' =$$

$$= \frac{pm(p)}{4\pi} \vec{e}_{x,z} R_{MM_0}^{-1} \exp(ikR_{MM_0}), R_{MM_0} = [x^2 + y^2 + (z - h)]^2,$$

$$k^2 = -\mu_0 p (p\epsilon_0\epsilon_r + \sigma).$$

Отсюда можно получить вид векторного потенциала в однородном полупространстве ($-\infty < x < \infty$, $-\infty < y < \infty$, $0 < z < \infty$, ϵ_r , $\sigma = \text{const}$), ограниченном с одной стороны идеально проводящей бесконечной плоскостью, совпадающей с плоскостью $z=0$. В этом случае, согласно методу зеркальных изображений, поле в верхнем полупространстве равно сумме полей, создаваемых в однородном пространстве двумя одинаковыми диполями, зеркально расположенными относительно плоскости $z=0$, направленными либо одинаково (в случае HMD или VED, либо в противоположные стороны (HED или VMD):

$$\vec{A}^{m,z}(M, p) = \\ = \frac{pm(p)}{4\pi} \vec{e}_{x,z} \begin{cases} R_-^{-1} \exp(ikR_-) + R_+^{-1} \exp(ikR_+), & \text{HMD или VED,} \\ R_-^{-1} \exp(ikR_-) - R_+^{-1} \exp(ikR_+), & \text{HED или VMD,} \end{cases}$$

$$R_{\pm} = [x^2 + y^2 + (z \pm h)]^2.$$

Полученное выражение удовлетворяет условию обращения в нуль тангенциальной компоненты электрического поля на идеально проводящей плоскости. Из него следует, что в случае HMD и VED можно устремить параметр h к нулю, тогда как в случае HED и VMD параметр h не может быть слишком мал.

ОДНОРОДНОЕ 2D ПОЛУПРОСТРАНСТВО

В однородном 2D пространстве ($-\infty < y < \infty$, $-\infty < z < \infty$, ε_r , $\sigma = \text{const}$) изображение Лапласа векторного потенциала на плоскости (y, z) с источником в виде бесконечной нити магнитного или электрического тока, проходящей через точку $M_0(y, z) = (0, h)$ параллельно оси x , имеет вид

$$\begin{aligned} \vec{A}^{м,э}(M, p) &= \frac{pm(p)}{4\pi} \vec{e}_x \iiint \delta(z' - h) \delta(y') G(M, M') dx' dy' dz' = \\ &= \frac{pm(p)}{4\pi} \vec{e}_x \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{R_-} \exp(ikR_-) dx = \frac{i}{4} p m(p) \vec{e}_x H_0^{(1)}(ik\rho_-), \end{aligned}$$

$$R_- = [x^2 + y^2 + (z - h)^2]^{1/2}, \quad \rho_- = [y^2 + (z - h)^2]^{1/2}.$$

Здесь $H_0^{(1)}$ — цилиндрическая функция Ханкеля первого рода нулевого порядка, для которой имеются различные интегральные представления:

$$H_0^{(1)}(k\rho) = \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\lambda\rho}}{\gamma} d\lambda = \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikR}}{R} dx,$$

где $R = (x^2 + \rho^2)^{1/2}$, $\gamma = (\lambda^2 - k^2)^{1/2}$, $\text{Re } \gamma > 0$.

Отсюда, аналогично рассмотренному выше 3D случаю, нетрудно получить вид векторного потенциала в случае однородного 2D полупространства ($-\infty < y < \infty$, $0 < z < \infty$, ε_r , $\sigma = \text{const}$), ограниченного с одной стороны идеально проводящей бесконечной плоскостью $z = 0$:

$$\begin{aligned} \vec{A}^{м,э}(M, p) &= \\ &= \frac{i}{4} p m(p) \vec{e}_x \begin{cases} H_0^{(1)}(ik\rho_-) + H_0^{(1)}(ik\rho_+), & \text{магнитная нить,} \\ H_0^{(1)}(ik\rho_-) - H_0^{(1)}(ik\rho_+), & \text{электрическая нить,} \end{cases} \\ \rho_{\pm} &= [y^2 + (z \pm h)^2]^{1/2}. \end{aligned}$$

Из полученного выражения следует, что в случае нити магнитного тока можно устремить параметр h к нулю, тогда как в случае нити электрического тока параметр h не может быть слишком мал.

**2D-МОДЕЛЬ. ОДНОРОДНОЕ ПОЛУПРОСТРАНСТВО,
ОГРАНИЧЕННОЕ ИДЕАЛЬНО ПРОВОДЯЩЕЙ ПЛОСКОСТЬЮ $Z=0$.
ВОЗБУЖДЕНИЕ НИТЬЮ МАГНИТНОГО ТОКА**

Положим параметр h равным нулю: $h=0_+$. Электромагнитное поле в полупространстве возбуждается бесконечной нитью магнитного тока, лежащей на идеально проводящем экране и проходящей вдоль оси x . Структура электромагнитного поля в полупространстве и на поверхности экрана будет точно такой же, как и структура поля, создаваемого бесконечно узкой щелью, прорезанной в экране вдоль всей оси x , к краям которой приложено напряжение $U=J_x$. В данном случае нас интересуют значения x -компоненты магнитного поля в точке наблюдения $M(y, z)$, причем задача в однородном полупространстве, очевидно, в силу того, что $h=0_+$, будет цилиндрически симметричной, $M(y, z)=M(\rho)$, $\rho=(y^2+z^2)^{1/2}$:

$$\vec{F}^3=0, \vec{F}^M(x, y, z)=\vec{e}_x \delta(z-h) \delta(y), \quad -\infty < x < \infty,$$

$$\vec{A}^3=0, \vec{A}^M=(A_x, 0, 0), \vec{H}=(H_x, 0, 0); \quad \partial/\partial x \equiv 0,$$

$$A_x=A_x(\rho, p)=\frac{i}{2} p m(p) H_0^{(1)}(k\rho), \quad k^2=-\mu_0 p(p \varepsilon_0 \varepsilon_r + \sigma),$$

$$H_x=H_x(\rho, p)=-p \varepsilon A_x(\rho, p)=-\frac{i}{2} p^2 \varepsilon(p) m(p) H_0^{(1)}(k\rho).$$

В результате в нормированных единицах получим выражение для x -компоненты магнитного поля в произвольной точке наблюдения $M(\rho)$ на момент времени t :

$$H_x(\rho, t)=\frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} e^{pt} H_x(\rho, p) dp = \quad (4.3)$$

$$=-\frac{1}{4\pi} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} (\tilde{p}^2 c \varepsilon_0 \varepsilon_r + \tilde{p} \sigma) \tilde{m}(\tilde{p}) e^{\tilde{p}t} H_0^{(1)}(k\rho) d\tilde{p},$$

$\alpha=\text{const}>0$. Ниже знак «тильда» над нормированными величинами опустим.

Рассмотрим импульс ступенчатой формы, функцию-изображение которого можно получить из формулы (4.1) путем предельного перехода при $\tau=\infty$. Из структуры выражения

(4.3) следует, что общее решение в этом случае состоит из суммы членов $\Phi_n(\rho, t)$ (с соответствующими коэффициентами), являющихся обратными преобразованиями Лапласа функций вида $G_n(\rho, p) = p^n H_0^{(1)}(k\rho)$, $n=0, 1$. Очевидно, достаточно найти оригинал преобразования Лапласа функции $G_0(\rho, p) = H_0^{(1)}(k\rho)$, являющейся фундаментальным решением в рассматриваемом цилиндрическом случае. Обратное преобразование Лапласа функции $G_1(\rho, p)$ можно затем определить путем дифференцирования по времени полученного оригинала функции $G_0(\rho, p)$, $\Phi_1 = \partial \Phi_0 / \partial t$.

Используя интегральное представление функции Ханкеля в формуле обращения Лапласа и изменяя порядок интегрирования, имеем

$$\begin{aligned}\Phi_0(\rho, t) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} H_0^{(1)}(k\rho) e^{pt} dp = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} \left(\frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\lambda\rho}}{\gamma} d\lambda \right) e^{pt} dp = \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\bar{\lambda} t_\rho) B(\bar{\lambda}, t) d\bar{\lambda},\end{aligned}$$

где

$$B(\bar{\lambda}, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} \frac{e^{pt} dp}{[p(p+2\chi)+\lambda^2]^{1/2}}; \operatorname{Re}[p(p+2\chi)+\lambda^2]^{1/2} \geq 0;$$

$$\bar{\lambda} = \lambda / \sqrt{\epsilon_r}; \quad t_\rho = \rho \sqrt{\epsilon_r}; \quad \chi = \eta_0 \sigma / (2\epsilon_r).$$

Параметр t_ρ означает момент времени прихода переднего фронта сигнала в точку наблюдения $M(\rho)$ (напомним, что время измеряется в нормированных единицах, имеющих ту же размерность, что и размерность оптического пути); коэффициент χ , как будет видно ниже, имеет смысл коэффициента затухания амплитуды сигнала во времени.

Последний интеграл можно представить в свернутом виде:

$$B(\bar{\lambda}, t) = e^{-\chi t} \begin{cases} J_0(t\sqrt{\lambda^2 - \chi^2}), & \lambda \geq \chi, \\ I_0(t\sqrt{\chi^2 - \lambda^2}), & \lambda < \chi, \end{cases}$$

где J_0 — функция Бесселя; I_0 — модифицированная функция Бесселя.

Подставим полученный вид функции $B(\lambda, t)$ в выражение для $\Phi_0(\rho, t)$ и преобразуем его:

$$\begin{aligned}\Phi_0(\rho, t) &= \frac{2}{\pi i} \int_0^{\infty} \cos(\lambda t_\rho) B(\lambda, t) d\lambda = \\ &= e^{-\chi t} \left[\int_0^x \cos(\lambda t_\rho) I_0(t \sqrt{\chi^2 - \lambda^2}) d\lambda + \right. \\ &\quad \left. + \int_x^{\infty} \cos(\lambda t_\rho) J_0(t \sqrt{\lambda^2 - \chi^2}) d\lambda \right].\end{aligned}$$

В первом интеграле сделаем замену: $q^2 = \chi^2 - \lambda^2$, после чего он преобразуется к табличному виду [3, 6, 11]:

$$\begin{aligned}\int_0^x \cos(\lambda \xi) I_0(t \sqrt{\chi^2 - \lambda^2}) d\lambda &= \int_0^x \cos(\xi \sqrt{\chi^2 - q^2}) I_0(qt) \frac{q dq}{\sqrt{\chi^2 - q^2}} = \\ &= \frac{\sin(\chi \sqrt{\xi^2 - t^2})}{\sqrt{\xi^2 - t^2}} = \begin{cases} \text{sh}(\chi \sqrt{t^2 - \xi^2}) / \sqrt{t^2 - \xi^2}, & t > \xi, \\ \sin(\chi \sqrt{\xi^2 - t^2}) / \sqrt{\xi^2 - t^2}, & t < \xi. \end{cases}\end{aligned}$$

Во втором интеграле сделаем замену $q = \lambda / \chi$, после чего он также преобразуется к табличному виду [6, 11]:

$$\begin{aligned}\int_x^{\infty} \cos(\lambda \xi) J_0(t \sqrt{\lambda^2 - \chi^2}) d\lambda &= \chi \cdot \text{Re} \int_1^{\infty} \exp(iq\chi\xi) J_0(t\chi\sqrt{q^2 - 1}) dq = \\ &= \text{Re} \frac{\exp(-\chi \sqrt{t^2 - \xi^2})}{\sqrt{t^2 - \xi^2}} = \begin{cases} \exp(-\chi \sqrt{t^2 - \xi^2}) / \sqrt{t^2 - \xi^2}, & t > \xi, \\ -\sin(\chi \sqrt{\xi^2 - t^2}) / \sqrt{\xi^2 - t^2}, & t < \xi. \end{cases}\end{aligned}$$

В результате имеем:

$$\Phi_0(\rho, t) = \zeta(t - t_\rho) \cdot A_0(t_\rho, t), \quad (4.4)$$

$$A_0(t_\rho, t) = \frac{2}{\pi i} \cdot \exp(-\chi t) \cdot \text{ch}(\chi \sqrt{t^2 - t_\rho^2}) / \sqrt{t^2 - t_\rho^2},$$

$$\text{где } \zeta(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 1, & t > 0. \end{cases}$$

Функцию $\Phi_0(\rho, t)$ естественно считать фундаментальным решением нестационарной задачи для рассматриваемого цилиндрического случая. Из (4.4) видно, что коэффициент χ имеет смысл коэффициента затухания амплитуды сигнала во времени.

Далее определим функцию

$$\Phi_1(\rho, t) = \frac{\partial}{\partial t} \Phi_0(\rho, t),$$

являющуюся, в силу того, что $\Phi_0(\rho, t)|_{t=0} = 0$, обратным преобразованием Лапласа функции $G_1(\rho, p) = p H_0^{(1)}(k\rho)$. Формальное выполнение операции дифференцирования по времени дает:

$$\Phi_1(\rho, t) = \zeta(t - t_p) \cdot A_1(t_p, t) + \delta(t - t_p) \cdot A_0(t_p, t_p + 0),$$

где

$$A_1(t_p, t) = \frac{\partial}{\partial t} A_0(t_p, t). \quad (4.5)$$

Отсюда видно, что функция $\Phi_1(\rho, t)$ принадлежит к классу обобщенных функций, причем при интегрировании по времени выражения (4.5) надо учитывать, что функция $A_0(t_p, t)$ неограниченно возрастает при $t \rightarrow t_p + 0$: $A_0(t_p, t) \sim (t - t_p)^{-1/2}$ при $t \sim t_p$. Это означает, что выражения вида

$$A = \int f(t) \delta(t - t_p) \cdot A_0(t_p, t_p + 0) dt$$

надо рассматривать как предельные соотношения: $A = \lim_{t \rightarrow t_p + 0} [f(t) \cdot A_0(t_p, t)]$, что накладывает определенные ограничения на выбор функции $f(t)$.

Используя функции Φ_n , $n=0,1$, нетрудно определить x -компоненту магнитного поля для случая прямоугольного импульса вида (4.1) произвольной длительности τ :

$$H_x(\rho, t) =$$

$$= -\frac{i}{2} m_0 \{ \zeta(\xi - t_p) [c \varepsilon_0 \varepsilon_r A_1(t_p, \xi) + \sigma A_0(t_p, \xi)] \} \Big|_{\xi=t}^{\xi=t-\tau}. \quad (4.6)$$

Заметим, что функции $A_0(t_p, \xi)$ и $A_1(t_p, \xi)$ равны нулю при $\xi < t_p$ и имеют особенности (стремятся к бесконечности) при $\xi \rightarrow t_p + 0$. В результате функция $H_x(\rho, t)$ равна нулю при $t < t_p$

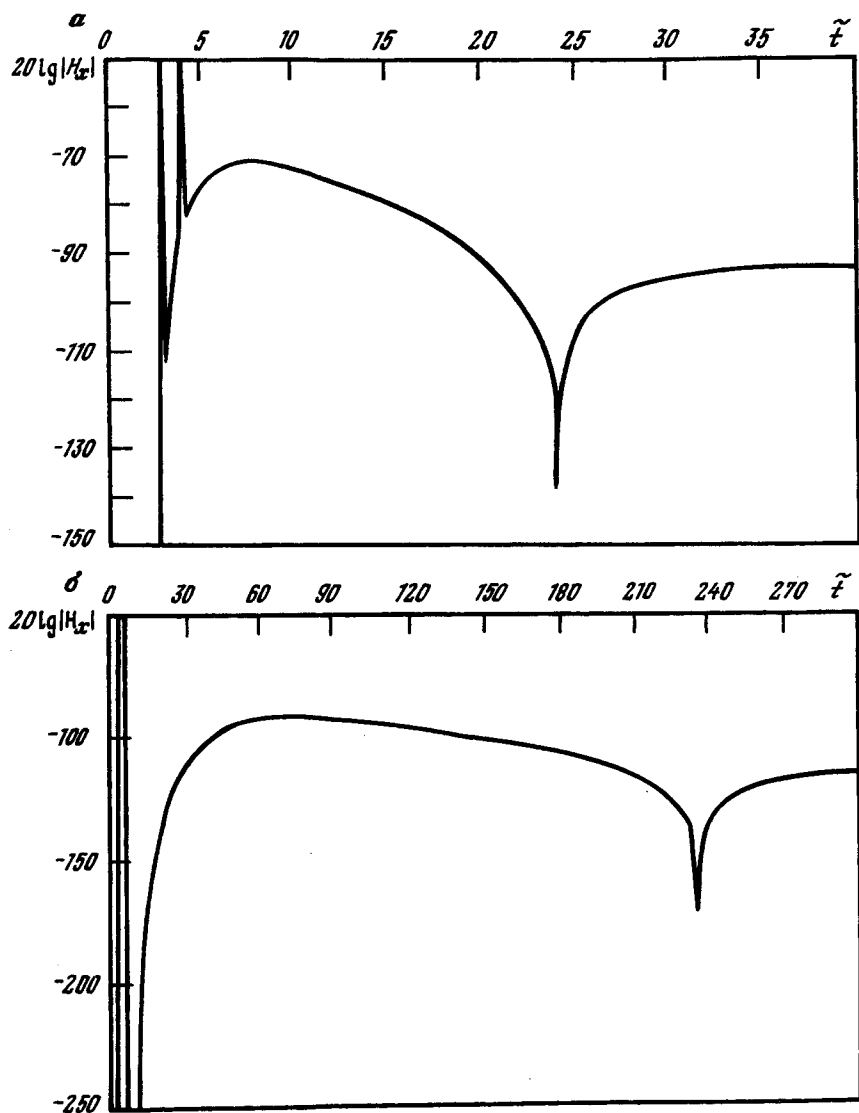


Рис. 4.4. Инверсия полярности компоненты магнитного поля H_x прямоугольного импульса в однородной среде с диэлектрической проницаемостью $\epsilon_r = 36$. Проводимость: а — $\sigma = 1$ См/м, б — $\sigma = 10$ См/м

и имеет особенности при $t = t_p$ и при $t = \tau + t_p$, соответствующие моментам включения и выключения импульса.

Каждое из слагаемых в выражении (4.6) для магнитного поля имеет разный физический смысл. При распространении импульса в средах с относительно небольшой проводимостью ($\sigma \approx 0,1$ См/м) доминирует первое слагаемое, дающее описание импульса с четко выраженными передним и задним фронтами (см. рис. 4.3). В средах с высокой проводимостью ($\sigma \geq 1$ См/м) распространение импульса приобретает диффузионный характер, описание которого дает второе слагаемое в (4.6). На рис. 4.4 приведены отклики поля H_x на возбуждение щели прямоугольным импульсом длительностью $\tau = 1$ в однородном полубесконечном слое с высокой проводимостью $\sigma = 1$ См/м (а) и $\sigma = 10$ См/м (б), диэлектрическая проницаемость слоев одна и та же, $\epsilon_r = 36$. Передний фронт импульса в точке наблюдения $M(0, y_m, 0)$, $y_m = 0,5$ м имеет монотонно нарастающий вид, ширина которого пропорциональна проводимости среды. Задний фронт импульса спадает значительно медленнее, и в момент времени t_{inv} полярность импульса (знак компоненты $H_x(\rho, t)$) резко меняется на противоположную. Аналогичный характер импульса во времени в заданной точке наблюдения поля был обнаружен также в работах [13, 17]. Момент инверсии полярности импульса t_{inv} жестко связан с проводимостью среды σ и с расстоянием до точки наблюдения $\rho = y_m$. Инверсия происходит в момент времени $t = t_{inv}$, определяемый соотношением

$$\exp(-\chi t) \cdot \exp(\chi \sqrt{t^2 - t_p^2}) / \sqrt{t^2 - t_p^2} = \\ = \exp(-\chi(t - \tau)) \cdot \exp(\chi \sqrt{(t - \tau)^2 - t_p^2}) / \sqrt{(t - \tau)^2 - t_p^2}.$$

Предполагая, что моменты времени t_p и t_{inv} значительно превосходят длительность импульса τ , из последнего соотношения находим момент времени инверсии:

$$t_{inv} = \eta_0 \sigma y_m^2 / 4, \quad \eta_0 = 120 \pi. \quad (4.7)$$

На рис. 4.4, а для среды с $\sigma = 1$ См/м в точке приема сигнала $y_m = 0,5$ м инверсия импульса происходит в момент времени $t_{inv} = 23,55$. Для среды с $\sigma = 10$ См/м момент инверсии, в соответствии с формулой (4.7), наступает в 10 раз позднее.

Исследованные закономерности характера электромагнитного импульса в средах с произвольными электрическими

параметрами играют большую роль при интерпретации данных, получаемых с помощью зондов СКИ.

В случае импульса произвольной формы решение, очевидно, может быть представлено в виде свертки функции импульса $m(t)$ (либо ее производных) и функций $\Phi_n(\rho, t)$ в следующих эквивалентных формах (при достаточной степени гладкости функции импульса):

$$\begin{aligned} H_x(\rho, t) &= -\frac{i}{2} \int_0^t \frac{\partial m(s)}{\partial s} [c \epsilon_0 \epsilon_r \Phi_1(\rho, t-s) + \sigma \Phi_0(\rho, t-s)] ds = \\ &= -\frac{i}{2} \int_0^t \left[c \epsilon_0 \epsilon_r \frac{\partial^2 m(s)}{\partial s^2} + \sigma \frac{\partial m(s)}{\partial s} \right] \Phi_0(\rho, t-s) ds. \end{aligned}$$

Для импульса гауссового вида имеем:

$$m(t) = m_0 \eta(t) \vartheta(t), \quad \vartheta(t) = \exp[-\beta^2(t - \tau_0)^2],$$

$$\frac{dm(t)}{dt} = m_0 [\delta(t) \vartheta(0) + \zeta(t) \vartheta'(t)], \quad \delta(t) = \zeta'(t),$$

$$\frac{d^2}{dt^2} m(t) = m_0 [\delta'(t) \vartheta(0) + \delta(t) \vartheta'(0) + \zeta(t) \vartheta''(t)].$$

Используя последнее из приведенных выше соотношений (более предпочтительное, так как в нем нет интегрирования функции Φ_1), а также известное свойство δ -функции:

$$\int \delta^{(k)}(x-a) f(x) dx = (-1)^k f^{(k)}(a),$$

получим

$$\begin{aligned} H_x(\rho, t) &= -\frac{i}{2} m_0 \zeta(t - t_0) \{ [c \epsilon_0 \epsilon_r \vartheta'(0) + \sigma \vartheta(0)] A_0(t_\rho, t) + \\ &+ c \epsilon_0 \epsilon_r \vartheta(0) A_1(t_\rho, t) + \int_0^{t-t_\rho} [c \epsilon_0 \epsilon_r \vartheta''(s) + \sigma \vartheta'(s)] A_0(t_\rho, t-s) ds \}. \end{aligned}$$

Интеграл в этом выражении путем замены переменных

$$q^2 = (t-s)^2 - t_\rho^2, \quad ds = -q (q^2 + t_\rho^2)^{-1/2} dq$$

преобразуется к следующему виду (не содержащему особенностей, связанных с особенностями функции $A_0(t_\rho, t-s)$):

$$\int_0^{t-t_p} [c\varepsilon_0\varepsilon_r \vartheta''(s) + \sigma \vartheta'(s)] A_0(t_p, t-s) ds = \int_0^{\sqrt{t^2-t_p^2}} c\varepsilon_0\varepsilon_r \vartheta''(t - \\ - \sqrt{q^2+t_p^2}) + \sigma \vartheta'(t - \sqrt{q^2+t_p^2})] \cdot \exp(-\chi \sqrt{q^2+t_p^2}) \frac{\operatorname{ch}(\chi q) dq}{\sqrt{q^2+t_p^2}}.$$

Полученное решение $H_x(\rho, t)$ равно нулю при $t < t_p = \rho \sqrt{\varepsilon_r}$ и имеет особенность при $t = t_p$, соответствующую моменту включения импульса.

ОДНОРОДНОЕ 2D ПОЛУПРОСТРАНСТВО. ВОЗБУЖДЕНИЕ ПОЛУПРОСТРАНСТВА БЕСКОНЕЧНОЙ НИТЬЮ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ТОКА

Решения задач данного класса имеют большое прикладное значение при проектировании аппаратуры для зондов сверхкоротких импульсов с электрическим дипольным возбуждением, а также более сложными источниками этого вида, например, антеннами большого тока.

Генерация электромагнитного поля в данной модели производится бесконечной нитью электрического тока, проходящей параллельно оси координат x через точку $(y, z) = (0, h)$; в данном случае нас интересуют значения x -компоненты электрического поля:

$$\vec{F}^M = 0, F^3(x, y, z) = \vec{e}_x \delta(z-h) \delta(y), \quad -\infty < x < \infty,$$

$$\vec{A}^M = 0, \vec{A}^3 = (A_x, 0, 0), \vec{E} = (E_x, 0, 0); \quad \partial/\partial x \equiv 0,$$

$$A_x = A_x(\rho, p) = \frac{i}{4} p m(p) [H_0^{(1)}(k\rho_-) - H_0^{(1)}(k\rho_+)],$$

$$k^2 = -\mu_0 p (p \varepsilon_0 \varepsilon_r + \sigma), \quad \rho_{\pm} = [y^2 + (z \pm h)^2]^{1/2},$$

$$E_x = E_x(\rho, p) = -p \mu_0 A_x(\rho, p) =$$

$$= -\frac{i}{4} p^2 \mu_0 m(p) [H_0^{(1)}(k\rho_-) - H_0^{(1)}(k\rho_+)].$$

Сравним последнее выражение с тем, что мы имели в случае x -компоненты магнитного поля для нити магнитного тока, лежащей на оси x . Отличия заключаются в том, что, во-

первых, вместо множителя $p^2 \mu_0$ мы имели множитель $p^2 (\epsilon_0 \epsilon_r + \sigma/p)$ и, во-вторых, в том, что в качестве аргумента функции Ханкеля вместо $k\rho_{\pm}$ там мы имели $k\rho$. В результате можно сразу получить общий вид x -компоненты электрического поля, соответствующего различным формам импульса, используя решение, полученное в предыдущем пункте.

Принимая во внимание эти замечания, для импульса прямоугольной формы будем иметь:

$$H_{\pi}(\rho, t) = -\frac{i}{4} m_0 \{ \zeta(\xi - t_p) [c \mu_0 A_1(t_p, \xi)] \}_{\xi=t-t_p}^{\xi=t},$$

$$A_1(t_p, t) = \frac{\partial}{\partial t} A_0(t_p, t),$$

$$A_0(t_p, t) = \frac{2}{\pi i} \cdot \exp(-\chi t) \cdot \operatorname{ch}(\chi \sqrt{t^2 - t_p^2}) / \sqrt{t^2 - t_p^2},$$

$$t_p = \rho \sqrt{\epsilon_r}, \quad \chi = \eta_0 \sigma / (2 \epsilon_r).$$

В результате в нормированных единицах получим выражение для x -компоненты электрического поля в произвольной точке наблюдения $M(y, z)$ на момент времени t для импульса прямоугольной формы:

$$E_x(y, z, t) = H_{\pi}(\rho_-, t) - H_{\pi}(\rho_+, t).$$

Аналогично для импульсов гауссового вида имеем

$$H_r(\rho, t) = -\frac{i}{4} m_0 \zeta(t - t_p) \{ c \mu_0 \mathcal{G}'(0) A_0(t_p, t) + \\ + c \mu_0 \mathcal{G}(0) A_1(t_p, t) + \int_0^{t-t_p} c \mu_0 \mathcal{G}''(s) A_0(t_p, t-s) ds \},$$

$$E_x(y, z, t) = H_r(\rho_-, t) - H_r(\rho_+, t).$$

Физический смысл полученного решения состоит в том, что отклик электрической компоненты поля является суперпозицией компонент, индуцируемых самим импульсом и его временными производными первого и второго порядка. Этот отклик представляет собой прямой сигнал, распространяющийся по буровому раствору вдоль металлического корпуса зонда.

4.2. ДВУХСЛОЙНЫЕ, ДВУХМЕРНЫЕ (2D) МОДЕЛИ ЗОНДОВ СКИ

Математические модели зондов СКИ с двухслойно-неоднородными средами широко применяются в процедурах первичной обработки сигналов, регистрируемых прибором СКИ в неоднородных околоскважинных зонах, а также при создании методов интерпретации результатов измерений.

Наличие границы раздела двух сред приводит к значительному усложнению волнового процесса, состоящего как из распространения прямой волны, так и ряда многократно отраженных и боковых волн. При определении границ раздела и электрических параметров более удаленных слоев необходимо построение эффективных алгоритмов расчета волновых полей, обусловленных наличием ближайшей к поверхности зонда границы раздела. Так, например, расстояния от скважины до кровли и подошвы пласта, водонефтяного (газоводяного) контакта необходимо определять с учетом влияния слоя бурового раствора (или зоны проникновения) вблизи поверхности зонда СКИ. Вычитая из всего волнового процесса компоненту, связанную с влиянием ближайшего к зонду слоя, получаем решение этой задачи.

Рассмотрим два основных типа источников электромагнитного импульса — нити магнитного или электрического токов, проходящих параллельно оси x . Для каждого из них строятся аналитические представления электромагнитного поля с помощью интегралов типа Зоммерфельда.

ГОРИЗОНТАЛЬНАЯ НИТЬ МАГНИТНОГО ТОКА

Рассмотрим подробнее случай, когда вблизи идеально проводящей плоскости $z=0$ (см. рис. 4.2) в среде 1 через точку ($y=0$, $z=h=0$) вдоль оси x проходит нить магнитного тока. Среда предполагается двухслойной, причем слой 1 ($0 < z < d$) имеет толщину d ; слой 2 ($z > d$) — полубесконечная среда; граница раздела двух сред — плоскость $z=d$; ϵ_{rj} , σ_j — соответственно относительная диэлектрическая проницаемость и проводимость среды j , $j=1, 2$.

Аналитически объемное пространственное распределение рассматриваемого линейного магнитного тока задается в следующем виде:

$$\vec{J}^m = (J_x, 0, 0), \quad \vec{J}^z = 0,$$

$$J_x(M, p) = F \delta(y) \delta(z-h), \quad F = p m(p),$$

$$\vec{E}(M, p) = -\text{rot } \vec{A}^m,$$

$$\vec{H}(M, p) = -p \varepsilon \vec{A}^m + \frac{1}{\mu p} \text{grad div } \vec{A}^m.$$

Расстояние от нити до идеально проводящей поверхности будем полагать в данном случае равным нулю: $h=0_+$, иными словами, мы имеем дело с возбуждением полупространства бесконечно узкой щелью, прорезанной в тонком плоском идеально проводящем экране.

Из основных соотношений электродинамики следует, что векторный потенциал в рассматриваемом случае плоскостой среды имеет только одну компоненту

$$\vec{A}^m(M, p) = (A_x, 0, 0),$$

которая удовлетворяет уравнению Гельмгольца в каждом слое j :

$$\Delta A_x + k^2 A_x = -F \delta(z-h) \cdot \delta(x) \delta(y), \quad k = k_j.$$

В результате изображение Лапласа потенциала $A_x^{(j)}$ в среде j можно представить в виде [10]

$$A_x^{(1)}(y, z, p) = \frac{F}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [e^{-\gamma_1 |z-h|} + g_1(\lambda) e^{-\gamma_1 z} + g_2(\lambda) e^{\gamma_1 z}] e^{i\lambda y} \frac{d\lambda}{\gamma_1},$$

$$A_x^{(2)}(y, z, p) = \frac{F}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g_3(\lambda) e^{-\gamma_2 z} e^{i\lambda y} \frac{d\lambda}{\gamma_2},$$

$$\gamma_j = \gamma_j(\lambda, p) = (\lambda^2 - k_j^2(p))^{1/2}, \quad \text{Re } \gamma_j > 0,$$

$$k_j^2(p) = -p^2 \varepsilon_j(p) \mu, \quad \text{Im } k_j > 0.$$

Заметим, что $A_x^{(j)}$ не зависит от координаты x , — в результате $\text{div } A_x^{(j)} \equiv 0$ и справедливо

$$\vec{E}(M, p) = \left(0, -\frac{\partial A_x}{\partial z}, \frac{\partial A_x}{\partial y}\right), \quad \vec{H}(M, p) = -p \varepsilon (A_x, 0, 0).$$

Три неизвестные функции $g_j, j=1, 2, 3$, находятся из условий непрерывности тангенциальных компонент электрического и магнитного полей на границе Γ_1 раздела двух сред:

из условий $E_y^+ = E_y^-|_{\Gamma_1}$ следует

$$\partial A_x^+ / \partial z = \partial A_x^- / \partial z|_{\Gamma_1};$$

из условий $H_x^+ = H_x^-|_{\Gamma_1}$ следует

$$k^2 A_x^- = k_+^2 A_x^+|_{\Gamma_1}.$$

Дополнительное условие имеем на идеально проводящей плоскости $z=0$, где тангенциальная компонента электрического поля равна нулю: $E_y|_{z=0} = 0$. Отсюда следует

$$\frac{\partial}{\partial z} A_x^{(1)}|_{z=0} = 0.$$

В итоге получаем следующие алгебраические соотношения между неизвестными функциями $g_j, j=1, 2, 3$:

$$1 - g_1 + g_2 = 0,$$

$$-(1 + g_1) B_{11} + g_2 A_{11} = -g_3 B_{21},$$

$$(1 + g_1) B_{11} + g_2 A_{11} = s_1 \alpha_1 g_3 B_{21},$$

где

$$A_{\alpha\beta} = \exp(\gamma_\alpha d_\beta); B_{\alpha\beta} = \exp(-\gamma_\alpha d_\beta); \alpha = 1, 2; \beta = 1, 2;$$

$$\alpha_1 = \gamma_1 / \gamma_2; s_1 = k^2 / k_1^2; d_1 = d.$$

Функции g_j находятся последовательным исключением:

$$g_1 = g_2 + 1,$$

$$2A_{11}g_2 = g_3 B_{21} (s_1 \alpha_1 - 1),$$

$$2B_{11} (1 + g_1) = g_3 B_{21} (s_1 \alpha_1 + 1).$$

Отсюда

$$g_3 B_{21} = 4B_{11} / \Delta,$$

$$g_2 = \frac{2}{\Delta} \delta_1 (s_1 \alpha_1 - 1), \Delta = (s_1 \alpha_1 + 1) - (s_1 \alpha_1 - 1) \delta_1,$$

$$\delta_1 = B_{11}^2 = \exp[-2\gamma_1 d].$$

Видно, что при $\lambda \rightarrow \infty$ $g_2(\lambda) \rightarrow 0$, так как $d > 0$.

В результате имеем следующее представление изображения Лапласа x -компоненты магнитного поля в среде 1:

$$H_x(y, z, p) = -p\epsilon_1 A_x^{(1)} = \\ = -p\epsilon_1 \frac{F}{2\pi} \left[\pi i H_0^{(1)}(k_1 \rho) + \int_{-\infty}^{\infty} g_2 \operatorname{ch}(\gamma_1 z) \exp(i\lambda y) \frac{d\lambda}{\gamma_1} \right],$$

где $\rho = (y^2 + z^2)^{1/2}$; $H_0^{(1)}$ — функция Ханкеля 1-го рода.

При выводе этой формулы было использовано тождество

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\lambda y - \gamma_1 |z|) \frac{d\lambda}{\gamma_1} = \pi i H_0^{(1)}(k_1 \rho).$$

Компонента $H_x(y, z, t)$ магнитного поля как функция времени находится с помощью обратного преобразования Лапласа:

$$H_x(M, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha - i\infty}^{\alpha + i\infty} e^{pt} H_x(M, p) dp.$$

Отметим одно важное свойство функции-изображения Лапласа $H_x(M, p)$:

$$H_x(M, \bar{p}) = \overline{H_x(M, p)},$$

где черта означает комплексное сопряжение.

Это свойство следует из того, что для входящих в определение $H_x(M, p)$ функций γ_j справедливо соотношение: $\gamma_j(\bar{p}) = \overline{\gamma_j(p)}$, так как $\operatorname{Re} \gamma_j > 0$.

Принимая все это во внимание, формулу обращения Лапласа можно записать в виде:

$$H_x(M, t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \operatorname{Re} [\exp((\alpha + i\omega)t) H_x(M, \alpha + i\omega)] d\omega.$$

Из последнего соотношения следует, что x -компонента магнитного поля будет действительной функцией; кроме того, эта формула позволяет сократить объем вычислений в 2 раза при прямом численном обращении преобразования Лапласа.

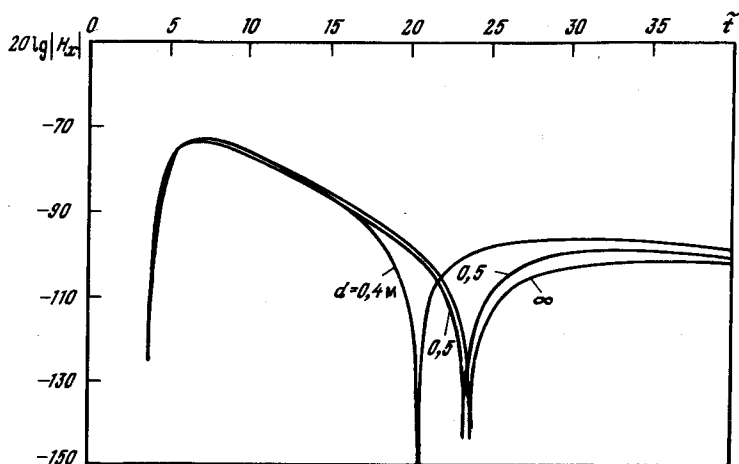


Рис. 4.5. Эффект зависимости времени инверсии импульса для отклика поля H_x на возбуждение гауссовым импульсом горизонтального магнитного диполя в двухслойной среде с большой проводимостью первого слоя ($\sigma_1=1$ См/м, $\epsilon_{r1}=40$; $\sigma_2=0,01$ См/м, $\epsilon_{r2}=4$) в точке приема сигнала $M(0, y_m, 0)$ при $y_m=0,5$ м для значений толщины слоя $d=0,4; 0,5$ м; ∞ ; время $t = c t_{\text{век}}$

Для вычисления последнего интеграла полубесконечный отрезок ($0 < \omega < \infty$) разбивался на отдельные интервалы интегрирования длиной Δ , по каждому из которых интегрирование производилось с применением квадратурных формул Гаусса с пятью узлами. Параметр Δ выбирался таким образом, чтобы отдельные интервалы интегрирования не превосходили полупериода осцилляций функции $\exp(i\omega t)$: $\Delta \leq \pi / \max(t)$.

На рис. 4.5 показан эффект инверсии электромагнитного импульса, проходящего в двухслойной среде, при большой проводимости и толщине первого слоя $\sigma_1=1$ См/м, $\epsilon_{r1}=40$. Кривые приведены для различных толщин первого слоя: $d=0,4$ м; $d=0,5$ м; $d=\infty$. Возбуждение магнитного диполя аналогично случаю на рис. 4.4. Электрические параметры второго полубесконечного слоя $\epsilon_{r2}=4$, $\sigma_2=0,01$ См/м. Точка приема сигнала $M(0, y_m, 0)$, как и в предыдущем примере, была фиксирована при $y_m=0,5$ м. Отсюда видно, что анализ времени прихода переднего фронта волны и значения максимальной амплитуды сигнала в точке M позволяют оценить толщину и электрические параметры первого слоя. Начало правой ветви

отклика, резко обозначенной в момент времени инверсии t_{inv} , непосредственно связано с толщиной первого слоя.

Предельные случаи: $|\varepsilon_1/\varepsilon_2| \ll 1$; $|\varepsilon_1/\varepsilon_2| \gg 1$.

Рассмотрим предельные случаи, первый из которых $|\varepsilon_1/\varepsilon_2| \ll 1$ способствует появлению волноводного эффекта в при-
скажинной зоне, второй — полного внутреннего отражения. При этом мы имеем возможность получить решения соответствующих задач распространения электромагнитных полей в конечной аналитической форме на основе применения теории вычетов.

Для рассматриваемых предельных случаев справедливо приближенное представление функций:

$$g_2(p) \approx g_{2v}(\gamma) = -2/[1 - \beta_v \exp(2\gamma d)], \quad \beta_1 = 1, \quad \beta_2 = -1,$$

где значения индекса $v=1$ и 2 соответствуют случаям 1 и 2 , здесь и ниже $\gamma = (\lambda^2 - k_1^2)^{1/2}$, $\text{Re } \gamma > 0$.

Для простоты ограничимся рассмотрением полей на плоскости $z=0$.

Вычисление изображения Лапласа x -компоненты магнитного поля $H_x(y, 0, p)$ сводится при этом к вычислению интегралов следующего вида:

$$H_v = \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} f_v(\gamma, \lambda) d\lambda, \quad f_v(\gamma, k) = [1 + g_{2v}(\gamma)] \frac{\exp(i\lambda y)}{\gamma},$$

где $y = y_M$.

Очевидно, подынтегральные функции $f_v(\gamma, \lambda)$ при обоих значениях v удовлетворяют условиям леммы Жордана в верхней полуплоскости комплексной плоскости λ . Поэтому интегралы H_v могут быть найдены с помощью теории вычетов, с учетом того, что функция $\gamma(\lambda)$ имеет в верхней полуплоскости точку ветвления $\lambda = k_1$, а подынтегральные функции $f_v(\gamma, \lambda)$ имеют счетное множество простых полюсов:

$$\lambda_{vn} = (k_1^2 + \gamma_{vn}^2)^{1/2}, \quad v=1, 2,$$

где $\gamma_{1n} = \pi i n/d$, $\gamma_{2n} = \pi i(n+0,5)/d$, $n=0, 1, 2, \dots$, причем при вычислении λ_{vn} надо брать значения, лежащие в верхней полуплоскости, $\text{Im}(\lambda_{vn}) \geq 0$. Проведем разрез комплексной плоскости λ прямой линией, начинающейся в точке ветвления k_1 , параллельной мнимой оси и проходящей в верхней полуплоскости. Правый и левый берега разреза обозначим A_R и A_L :

$$A_R = \{\lambda = k_1 + s \cdot \exp(i\pi/2), +\infty > s > 0\},$$

$$A_L = \{\lambda = k_1 + s \cdot \exp(i\pi/2 - 2\pi i), 0 < s < +\infty\},$$

причем на этих берегах значения функции $\gamma(\lambda)$ противоположны:

$$\gamma(\lambda)|_{\lambda \in A_R} = -\gamma(\lambda)|_{\lambda \in A_L}.$$

В результате искомые интегралы будут равны сумме интегралов по обоим берегам разреза, а также сумме вычетов подынтегральных функций относительно полюсов, лежащих в верхней полуплоскости:

$$\pi i H_v = 2\pi i \sum_{n=0}^{\infty} \text{Res} f_v(\gamma, \lambda)|_{\lambda_{vn}} + \int_{A_R} f_v(\gamma, \lambda) d\lambda + \int_{A_L} f_v(\gamma, \lambda) d\lambda.$$

Подынтегральные функции в последнем выражении являются четными относительно функции γ :

$$f_v(-\gamma, \lambda) = f_v(\gamma, \lambda).$$

Поэтому, очевидно,

$$\int_{A_R} f_v(\gamma, \lambda) d\lambda + \int_{A_L} f_v(\gamma, \lambda) d\lambda = 0$$

и значения H_v определяются только вкладом от полюсов. Этот же результат можно получить, применяя общую теорию построения полной системы волн в слоистых волноводах [8, 15].

Для нахождения вычетов в первом предельном случае введем функции $R_n(\gamma)$, $n=0, 1, 2, \dots$, согласно соотношениям:

$$1 - \exp(2\gamma d) = \gamma R_0(\gamma) = \gamma(\gamma^2 - \gamma_{1n}^2) \cdot R_n(\gamma), \quad n=1, 2, 3, \dots,$$

откуда

$$\text{Res} f_1(\gamma, \lambda)|_{\lambda_{10}} = \text{Res} \frac{-2 \exp(i\lambda y)}{\gamma^2 R_0(\gamma)}|_{\lambda_{10}} = \frac{-2 \exp(i\lambda_{10} y)}{2\lambda_{10} R_0(\gamma_{10})},$$

$$\text{Res} f_1(\gamma, \lambda)|_{\lambda_{1n}} = \frac{-2 \exp(i\lambda_{1n} y)}{2\lambda_{1n} \gamma_{1n}^2 R_n(\gamma_{1n})},$$

$$R_0(\gamma_{10}) = \lim_{\gamma \rightarrow 0} [1 - \exp(2\gamma d)] / \gamma = -2d,$$

$$R_n(\gamma_{1n}) = \lim_{\gamma \rightarrow \gamma_{1n}} [1 - \exp(2\gamma d)] / [\gamma(\gamma^2 - \gamma_{1n}^2)] = -d/\gamma_{1n}^2.$$

Окончательно получим:

$$H_1 = \frac{1}{d} \frac{\exp(i\lambda_{10}y)}{\lambda_{10}} + \frac{2}{d} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\exp(i\lambda_{1n}y)}{\lambda_{1n}}.$$

Аналогично определяется вид функции H_2 во втором предельном случае:

$$H_2 = \frac{2}{d} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\exp(i\lambda_{2n}y)}{\lambda_{2n}}.$$

При вычислении значений указанных рядов число N членов ряда, требуемых для обеспечения заданной точности, зависит от значения параметра k_1 . Например, при $p = \alpha - i\omega$ в случае малых α , σ_1 имеем

$$k_1 \sim \omega \cdot (\epsilon_{r1})^{1/2},$$

$$\lambda_{1n} \sim \frac{\pi}{n} \begin{cases} (\Omega^2 - n^2)^{1/2}, & \text{при } 0 < n < \Omega, \\ i \cdot (n^2 - \Omega^2)^{1/2}, & \text{при } n > \Omega, \end{cases}$$

где $\Omega = \omega h (\epsilon_{r1})^{1/2} / \pi$. Отсюда следует, что при вычислении H_1 надо брать $N \gg \Omega$

ГОРИЗОНТАЛЬНАЯ НИТЬ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ТОКА

В случае бесконечной горизонтальной нити магнитного тока имеем:

$$\vec{J} = (J_x, 0, 0), \quad \vec{J}^m = 0,$$

$$J_x(M, p) = F \delta(y) \delta(z - h), \quad F = pm(p),$$

$$H(M, p) = \text{rot } \vec{A}^z,$$

$$\vec{E}(M, p) = -\mu p \vec{A}^z + \frac{1}{\epsilon p} \text{grad div } \vec{A}^z.$$

Расстояние от нити электрического тока до идеально проводящей поверхности в данном случае не равно нулю: $0 < h < d$. Ограничимся случаем двухслойной среды.

Из основных соотношений теории дифракции следует, что векторный потенциал в рассматриваемом случае плоскостной среды имеет только одну компоненту:

$$\vec{A}^z(M, p) = (A_x, 0, 0),$$

которая удовлетворяет уравнению Гельмгольца в каждом слое j :

$$\Delta A_x + k^2 A_x = -F \delta(z-h) \cdot \delta(x) \delta(y), \quad k = k_j.$$

Изображение Лапласа потенциала $A_x^{(j)}$ в среде j можно представить в следующем виде:

$$A_x^{(1)}(y, z, p) = \frac{F}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [e^{-\gamma_1 |z-h|} + g_1(\lambda) e^{-\gamma_1 z} + g_2(\lambda) e^{-\gamma_1 z}] e^{i\lambda y} \frac{d\lambda}{\gamma_1},$$

$$A_x^{(2)}(y, z, p) = \frac{F}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g_3(\lambda) e^{-\gamma_2 z} e^{i\lambda y} \frac{d\lambda}{\gamma_2},$$

$$\gamma_j = \gamma_j(\lambda, p) = (\lambda^2 - k_j^2(p))^{1/2}, \quad \operatorname{Re} \gamma_j > 0,$$

$$k_j^2(p) = -p^2 \epsilon_j(p) \mu, \quad \operatorname{Im} k_j > 0.$$

Заметим, что $A_x^{(j)}$ не зависит от координаты x , — в результате $\operatorname{div} A_x^{(j)} = 0$, и справедливо:

$$\vec{H}(M, p) = \left(0, \frac{\partial A_x}{\partial z}, -\frac{\partial A_x}{\partial y} \right), \quad \vec{E}(M, p) = -\mu p (A_x, 0, 0).$$

Три неизвестные функции $g_j, j = 1, 2, 3$, находятся из условий непрерывности тангенциальных компонент электрического и магнитного полей на границе Γ_1 раздела двух сред: из условий $E_x^+ = E_{x|\Gamma_1}^-$ следует

$$A_x^+ = A_{x|\Gamma_1}^-,$$

из условий $H_y^+ = H_{y|\Gamma_1}^-$ следует:

$$\partial A_x^+ / \partial z = \partial A_{x|\Gamma_1}^- / \partial z.$$

Дополнительное условие имеем на плоскости $z=0$ из условия $E_{x|z=0} = 0$:

$$A_{x|z=0}^{(1)} = 0.$$

В итоге это приводит к следующим алгебраическим соотношениям между неизвестными функциями $g_j, j = 1, 2, 3$:

$$B_{10} + g_1 + g_2 = 0,$$

$$(A_{10} + g_1) B_{11} + g_2 A_{11} = \alpha_1 g_3 B_{21},$$

$$-(A_{10} + g_1) B_{11} + g_2 A_{11} = -g_3 B_{21},$$

где

$$A_{\alpha\beta} = \exp(\gamma_{\alpha} d_{\beta}); B_{\alpha\beta} = \exp(-\gamma_{\alpha} d_{\beta}); \alpha = 1, 2; \beta = 1, 2;$$

$$\alpha_1 = \gamma_1 / \gamma_2; s_1 = k_2^2 / k_1^2; B_{10} = e^{-\gamma_1 h}; d_0 = h; d_1 = d.$$

Функции g_j находятся последовательным исключением:

$$g_1 = -g_2 - B_{10},$$

$$2A_{11}g_2 = g_3B_{21}(\alpha_1 - 1),$$

$$2B_{11}(A_{10} - B_{10} - g_2) = g_3B_{21}(\alpha_1 + 1).$$

Отсюда

$$g_2 = \frac{2}{D} \delta_1 \operatorname{sh}(\gamma_1 h)(\alpha_1 - 1), D = \alpha_1 + 1 + (\alpha_1 - 1) \delta_1,$$

$$\delta_1 = B_{11}^2 = \exp(-2\gamma_1 d).$$

Из последних выражений следует, что при $\lambda \rightarrow \infty$ $g_2(\lambda) \rightarrow 0$, так как $d > 0$.

В результате получаем необходимое представление изображения Лапласа x -компоненты электрического поля в среде 1:

$$E_x(y, z, p) = -\mu p A_x^{(1)} = -\mu p \frac{F}{2\pi} \left\{ \pi i [H_0^{(1)}(k_1 \rho_-) - H_0^{(1)}(k_1 \rho_+)] + \right. \\ \left. + \int_{-\infty}^{\infty} g_2 \operatorname{sh}(\gamma_1 z) \exp(i\lambda y) \frac{d\lambda}{\gamma_1} \right\},$$

$$\text{где } \rho_{\pm} = [y^2 + (z \pm h)^2]^{1/2}.$$

Компонента электрического поля $E_x(y, z, t)$ как функция времени находится с помощью обратного преобразования Лапласа. Как и для случая нити магнитного тока, можно показать, что эта функция действительна.

На рис. 4.6 представлен отклик компоненты электрического поля $E_x(y, z, t)$ как функция времени в двухслойной среде с диэлектрической проницаемостью и проводимостью первого слоя $\epsilon_{r1} = 80$, $\sigma_1 = 1$ См/м. Кривые приведены для толщины первого слоя $d = 0,5$ м. Возбуждение среды производилось нитью электрического тока с прямоугольным импульсом длительностью $\tau_0 = 1$ (рис. 4.6, а) и гауссовым импульсом с $\beta = 5$, $\tau_0 = 1$ (рис. 4.6, б); обе нити проходят параллельно оси x на расстоянии $h = 0,02$ м от плоскости $z = 0$. Электрические параметры второго полубесконечного слоя $\epsilon_{r2} = 9$, $\sigma_2 = 0,01$ См/м.

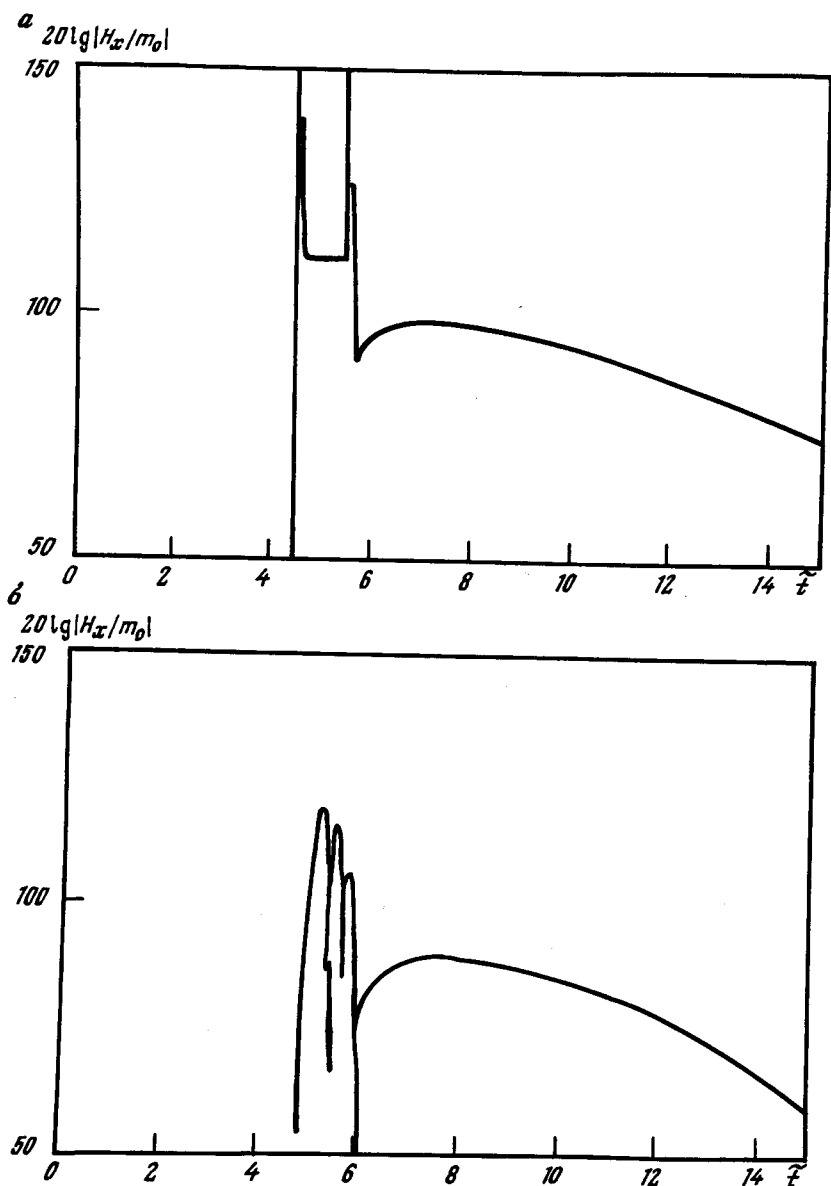


Рис. 4.6. Отклик компоненты электрического поля $E_x(y, z, t)$ в двухслойной среде с диэлектрической проницаемостью и проводимостью первого слоя $\epsilon_{r1}=80$, $\sigma_1=1$ См/м в точке приёма сигнала $M(0, y_m, h)$ при $y_m=0,5$ м для слоя толщиной $d=0,5$ м.

Источник поля — нить электрического тока с прямоугольным импульсом длительностью $\tau_0 = 1$ (а) и гауссовым импульсом с $\beta = 5$, $\tau_0 = 1$ (б)

Точка приема сигнала $M(0, y_m, h)$ была фиксирована при $y_m = 0,5$ м. Отсюда следует, что, в отличие от возбуждения такой же среды с относительно большой проводимостью первого слоя нитью магнитного тока (щелью в идеально проводящем экране), первое вступление сигнала, возбуждаемого нитью электрического тока, сохраняет форму импульса. Диффузия импульса происходит в более поздний период прихода импульса и представлена правой ветвью отклика. Наличие трех лепестков в прямом сигнале в точке приема M при возбуждении гауссового импульса и острых всплесков по краям прямого сигнала для прямоугольного импульса связано с дифференцированием по времени формы возбуждающего импульса.

4.3. АНАЛИТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ДВУХМЕРНОЙ МОДЕЛИ ЗОНДА СКИ В ДВУХСЛОЙНОЙ СРЕДЕ

Рассмотрим полное магнитное поле в точке $M(0, y, 0)$ на идеально проводящей плоскости $z = 0$, ограничивающей с одной стороны двухслойное полубесконечное пространство, возбуждаемое узкой щелью, прорезанной вдоль всей оси x , ось z направим в глубь среды (рис. 4.2). Как было отмечено в предыдущих разделах, геометрия данной системы является двухмерной моделью зонда сверхкоротких импульсов (СКИ) в горизонтальной скважине в двухслойно-неоднородном пространстве.

Изображение Лапласа x -компоненты магнитного поля в точке наблюдения $M = M(0, y, 0)$, ($y = r > 0$) в 2D-модели для двухслойной среды выражается через x -компоненту изображения векторного потенциала:

$$H_x(M, p) = -p \varepsilon_1(p) A_x(y, p), \quad A_x(M, p) = \frac{i}{2} p m(p) A(M, p),$$

$$A(M, p) = \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} [1 + g_2] e^{i\lambda y} \frac{d\lambda}{\gamma_1},$$

$$\text{где } g_2 = g_2(\lambda, p) = \frac{2[\varepsilon_1(p)\gamma_2 - \varepsilon_2(p)\gamma_1]}{\varepsilon_2(p)\gamma_1[1 - \exp(2\gamma_1 d)] - \varepsilon_1(p)\gamma_2[1 + \exp(2\gamma_1 d)]};$$

g*

$$\varepsilon_j(p) = \varepsilon_0 \varepsilon_{rj} + \sigma_j / p; \quad \gamma_j = \gamma_j(\lambda, p) = [\lambda^2 - k_j^2]^{1/2};$$

$$k_j = [-p^2 \mu_0 \varepsilon_j(p)]^{1/2}; \quad \text{Im } k_j > 0.$$

$\text{Re } \gamma_j > 0$ — условие интегрируемости, индекс $j=1,2$ соответствует номеру слоя; d — толщина первого слоя (в котором находится источник); p — переменная преобразования Лапласа; $m(p)$ — преобразование Лапласа нестационарной функции для величины магнитного заряда.

Поле в среде 2, где нет сторонних источников, обязано своим появлением эквивалентным поверхностным токам, наведенным на плоскости раздела $z=d$. Следовательно, векторный потенциал этого поля $A_x^{(2)}(y, z, p)$ может быть представлен в виде бесконечного непрерывного спектра пространственных гармоник с амплитудами $g_3(\lambda)$, распространяющихся и затухающих в сторону $z > 0$:

$$A_x^{(2)}(y, z, p) = \frac{F}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g_3(\lambda) e^{-\gamma_2 z} e^{i\lambda y} \frac{d\lambda}{\gamma_2}.$$

Отсюда следует необходимость условия $\text{Re } \gamma_2 > 0$ для обеспечения сходимости интеграла и обращения его в нуль в пределе при $z = +\infty$.

Дальнейший анализ волнового поля в слоистых средах основан на представлении функции $g_2(\lambda, p)$ в виде функционального степенного ряда, предложенного С. Б. Поповым [1]. Разложение функции $g_2(\lambda, p)$ в ряд имеет вид:

$$g_2(\lambda, p) = \frac{2qB}{1-qB} = 2 \sum_{m=1}^{\infty} (qB)^m,$$

$$\text{где } q = q(\lambda, p) = \frac{k_2^2 \gamma_1 - k_1^2 \gamma_2}{k_2^2 \gamma_1 + k_1^2 \gamma_2}; \quad B = \exp(-2\gamma_1 d).$$

С физической точки зрения коэффициент $q(\lambda, p)$ является комплексным коэффициентом отражения волны от границы раздела двух сред и не может по модулю быть больше единицы (иначе модуль амплитуды отраженной волны был бы больше модуля амплитуды падающей волны). Условие $|q| \leq 1$ является также, очевидно, условием разложимости функции $g_2(\lambda, p)$ в степенной ряд. Математически это условие эквивалентно условию $\text{Re } \beta \geq 0$, $\beta = k_2^2 \gamma_1 / (k_1^2 \gamma_2)$, так как

$$|q|^2 = \left| \frac{1-\beta}{1+\beta} \right|^2 = \frac{(1-\operatorname{Re} \beta)^2 + (\operatorname{Im} \beta)^2}{(1+\operatorname{Re} \beta)^2 + (\operatorname{Im} \beta)^2} = 1 - \frac{4 \operatorname{Re} \beta}{(1+\operatorname{Re} \beta)^2 + (\operatorname{Im} \beta)^2}.$$

Таким образом, имеем условие разложимости:

$$\operatorname{Re}(k_2^2 \gamma_1 \bar{k}_1^2 \bar{\gamma}_2) \geq 0.$$

Ниже это условие будет рассмотрено подробнее.

Подставляя степенной ряд g_2 в выражение для векторного потенциала $A(M, p)$, получим:

$$A(M, p) = A_0(M, p) + 2 \sum_{m=1}^{\infty} A_m(M, p), \quad (4.8)$$

где

$$A_m(M, p) = \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} (qB)^m \frac{\exp(i\lambda r)}{\gamma_1} d\lambda, \quad m=0, 1, 2, \dots$$

Очевидно, $A_0(M, p) = H_0^{(1)}(r \cdot k_1)$, что соответствует прямому сигналу, пришедшему в точку наблюдения M . Ниже будет показано, что члены ряда (4.8) с индексами $m > 0$ отвечают сигналам, испытавшим m отражений от границы раздела двух сред. Оценим слагаемое с индексом $m > 0$:

$$A_m(M, p) = \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} q^m \exp(i\lambda r - 2mh\gamma_1) \gamma_1^{-1} d\lambda, \quad m=1, 2, \dots$$

Обозначим $n = k_2/k_1$ и сделаем замену переменных [2]:

$$\lambda = k_1 \sin \theta, \quad \gamma_1 = -ik_1 \cos \theta, \quad d\lambda = k_1 \cos \theta d\theta,$$

$$A_m(M, p) = \frac{1}{\pi} \int_{\Gamma} q^m \exp[ik_1(r \sin \theta + 2mh \cos \theta)] d\theta,$$

$$q = q(\theta) = \frac{n^2 \cos \theta - (n^2 - \sin^2 \theta)^{1/2}}{n^2 \cos \theta + (n^2 - \sin^2 \theta)^{1/2}},$$

путь интегрирования Γ проходит на комплексной плоскости $\theta = \theta' + i\theta''$ и зависит от знака параметра $\omega = -\operatorname{Im} p$:

при $\omega > 0$ мы имеем тот же путь, что и в [2]:

$$\Gamma = \Gamma^+ = \{\theta' = -\pi/2, +\infty > \theta'' > 0\} + \{-\pi/2 \leq \theta' \leq -\pi/2, \theta'' = 0\} + \{\theta' = \pi/2, 0 > \theta'' > -\infty\},$$

тогда как при $\omega < 0$ путь будет [20]:

$$\Gamma = \Gamma^- = \{\theta' = -\pi/2, -\infty < \theta'' < 0\} + \{-\pi/2 \leq \theta' \leq -\pi/2, \theta'' = 0\} + \{\theta' = \pi/2, 0 < \theta'' < +\infty\}.$$

Рассмотрим подробнее необходимость применения разных путей интегрирования. При указанной выше замене переменных условия интегрируемости $\operatorname{Re} \gamma_j > 0, j = 1, 2$, перейдут в следующие:

$$\operatorname{Im}(k_1 \cos \theta) \geq 0, \text{ или}$$

$$\operatorname{Im} k_1 \operatorname{Re}(\cos \theta) + \operatorname{Im}(\cos \theta) \operatorname{Re} k_1 \geq 0, \quad (4.9)$$

$$\operatorname{Im}(k_1 S) \geq 0, \text{ или } \operatorname{Im} k_1 \operatorname{Re} S + \operatorname{Im} S \operatorname{Re} k_1 \geq 0, \quad (4.10)$$

$$\text{где } S = (n^2 - \sin^2 \theta)^{1/2}.$$

Из соотношений

$$k_j^2 = -p^2 \mu_0 (\varepsilon_0 \varepsilon_{rj} + \sigma_j / p), \quad p = \alpha - i\omega, \quad 0 < \alpha \ll 1,$$

$$\operatorname{Im} k_j^2 = \omega(\sigma_j + 2\alpha), \quad \operatorname{Im} k_j > 0$$

следует: $\operatorname{Re} k_j = \operatorname{sign}(\omega)$.

Проверим выполнение условия (4.9) вдоль пути интегрирования. На участке пути, общем для $\Gamma^\pm$: $-\pi/2 \leq \theta' \leq -\pi/2, \theta'' = 0$ имеем $\operatorname{Re}(\cos \theta) \geq 0, \operatorname{Im}(\cos \theta) = 0$, откуда непосредственно следует выполнение условия (4.9). Рассмотрим участок пути Γ^+ : $\theta' = -\pi/2, +\infty > \theta'' > 0$, на этом участке $\operatorname{Re}(\cos \theta) = 0, \operatorname{Im}(\cos \theta) = \operatorname{sh} \theta'' > 0$, и условие (4.9) будет выполнено лишь при условии $\operatorname{Re} k_1 \geq 0$, что справедливо только для $\omega > 0$. При $\omega < 0$ надо использовать соответствующий участок пути Γ^- : $\theta' = -\pi/2, -\infty < \theta'' < 0$; на этом участке $\operatorname{Re}(\cos \theta) = 0, \operatorname{Im}(\cos \theta) = \operatorname{sh} \theta'' < 0$, и условие (4.9) будет выполнено уже только при $\operatorname{Re} k_1 \leq 0$, что соответствует области $\omega < 0$.

Заметим, что достаточно рассмотреть только область $\omega > 0$, так как противоположный случай рассматривается аналогично.

В области $\omega > 0$ изучим условие разложимости функции g_2 в степенной ряд (вдоль пути интегрирования $\Gamma = \Gamma^+$), которое, как мы показали выше, эквивалентно условию

$$\operatorname{Re}(k_2^2 \gamma_1 \bar{k}_1^2 \bar{\gamma}_2) \geq 0.$$

Кроме того, проверим выполнимость другого условия:

$$\operatorname{Re}(\gamma_1 \bar{\gamma}_2) \geq 0,$$

которое в дальнейшем будет использовано в 3D-модели. Пусть параметр $n = k_2/k_1$ удовлетворяет условию: $\text{Im}(n^2) \geq 0$ (или $\varepsilon_{r,1}\sigma_2 \geq \varepsilon_{r,2}\sigma_1$). Тогда, в силу того, что вдоль Γ $\text{Im}(\sin^2 \theta) = 0$, получаем, что мнимая и действительная части S имеют одинаковые знаки, а из условия (4.10) и того, что при $\omega > 0$ $\text{Im} k_1 > 0$, $\text{Re} k_1 > 0$, следует, что одновременно $\text{Re} S \geq 0$ и $\text{Im} S \geq 0$. Вдоль пути Γ , очевидно, справедливо: $\text{Re}(\cos \theta) \geq 0$ и $\text{Im}(\cos \theta) \geq 0$, откуда следует выполнение условия $\text{Re}(\gamma_2/\gamma_1) \geq 0$. Выполнение более сложного условия $\text{Re}(n^2 \cos \theta/S) \geq 0$ нетрудно получить для участка интегрирования, лежащего на действительной оси, так как в этом случае

$$\text{Re}(n^2 \cos \theta/S) \sim \text{Re}(S + \sin^2 \theta/S) = (1 + \sin^2 \theta/|S|^2) \text{Re} S \geq 0.$$

К сожалению, для других участков интегрирования требуемое условие удастся получить только в более узком предположении, что параметр n чисто действителен, — тогда условие $\text{Re}(n^2 \cos \theta/S) \geq 0$ будет эквивалентно доказанному ранее условию $\text{Re}(\cos \theta/S) \geq 0$.

При исследовании функции $A_m(M, p)$ введем в рассмотрение величины

$$R_m = [r^2 + (2md)^2]^{1/2}, \quad m \geq 0, \quad \theta_m = \arctg\left(\frac{r}{2md}\right), \quad m > 0.$$

Получим

$$A_m(M, p) = \frac{1}{\pi} \int_{\Gamma} q^m \exp[ik_1 R_m \cos(\theta - \theta_m)] d\theta. \quad (4.11)$$

Здесь R_m , $m > 0$, имеет физический смысл длины пути, пройденного волной, испытавшей m отражений от границы раздела двух сред (и $m - 1$ отражение от идеально проводящей плоскости x_0), прежде чем попасть в точку наблюдения $M(r)$; θ_m равен углу падения этой волны на границу раздела двух сред при каждом из m отражений. Для общности обозначим $R_0 = r$ (длина прямого пути из источника в точку M).

Интеграл (4.11) представим в виде

$$A_m(M, p) = \int_{\Gamma} F(\theta) e^{\rho f(\theta)} d\theta, \quad (4.12)$$

где $f(\theta) = ik_1 \cos(\theta - \theta_m)$; $\rho = R_m$; $F(\theta) = \frac{1}{\pi} q^m(\theta)$.

Интеграл вида (4.12) при наличии точки перевала θ_s , определяемой уравнением $f'(\theta_s) = 0$, имеет в первом приближении асимптотическую оценку:

$$\int_{\Gamma} F(\theta) e^{\rho f(\theta)} d\theta \cong F(\theta_s) e^{\rho f(\theta_s)} \left(\frac{-2\pi}{\rho f''(\theta_s)} \right)^{1/2} \left(1 + O\left(\frac{1}{\rho}\right) \right). \quad (4.13)$$

Для интеграла (4.11) точкой перевала будет значение $\theta_s = \theta_m$. Уравнение контура скорейшего спуска имеет следующий вид:

$$\operatorname{Re} \cos(\theta - \theta_s) = 1, \text{ иными словами, } \cos(\theta' - \theta_s) \operatorname{ch} \theta'' = 1.$$

Вводя новую переменную s , получаем выражение: $\cos(\theta - \theta_s) = 1 + is^2$, где s — действительная переменная интегрирования по контуру скорейшего спуска, пробегающая все значения от $-\infty$ до $+\infty$.

Отметим, что подынтегральное выражение имеет полюса, являющиеся корнями знаменателя функции $q(\theta)$:

$$n^2 \cos \theta + (n^2 - \sin^2 \theta)^{1/2} = 0.$$

Однако, как показано в работе [2], эти полюса не затрагиваются при деформации пути Γ в контур скорейшего спуска, поэтому их не надо учитывать.

Заметим, что соотношение (4.13) является описанием электромагнитного поля в приближении геометрической оптики. Уточнение этого приближения может быть произведено двумя путями [2]: во-первых, учет второго приближения в методе перевала, во-вторых, добавление волны нового типа, соответствующей боковой волне. Боковая волна математически выражается в виде интеграла по берегам разреза от точки ветвления $\theta_b = \arcsin n$, возникающего в случае $\varepsilon_{2r} < \varepsilon_{1r}$. Случай боковой волны будет рассмотрен ниже.

При больших значениях R_m можно получить в приближении геометрической оптики следующую асимптотику:

$$A_m(M, p) \cong q_m^m \left(\frac{2}{\pi i k_1 R_m} \right)^{1/2} \exp(ik_1 R_m), \quad q_m = q(\theta_m). \quad (4.14)$$

Далее воспользуемся асимптотическим представлением функции Ханкеля, справедливым при больших R_m ,

$$H_0^{(1)}(k_1 R_m) \cong \left(\frac{2}{\pi i k_1 R_m} \right)^{1/2} \exp(i k_1 R_m),$$

откуда следует, что выражение (4.13) в рамках того же приближения можно записать в виде

$$A_m(M, p) \cong q_m^m H_0^{(1)}(k_1 R_m). \quad (4.15)$$

В случае функции q , не зависящей от θ , это выражение превращается в строгое равенство.

В результате имеем

$$A_m(M, p) \cong H_0^{(1)}(k_1 R_0) + 2 \sum_{m=1}^{\infty} q_m^m H_0^{(1)}(k_1 R_m). \quad (4.16)$$

В нестационарном случае функциональный ряд (4.16) имеет промежуточный характер, поскольку конечной целью является определение $H_x(M, t)$ путем применения обратного преобразования Лапласа к выражению

$$H_x(M, p) = -\frac{1}{2} p^2 \varepsilon_1(p) m(p) A(M, p). \quad (4.17)$$

При этом, аналогично случаю однородного пространства, имеет смысл вначале определить обратное преобразование Лапласа выражения (4.16), соответствующего $A(M, p)$. Обратное преобразование Лапласа функции $H_x(M, p)$ может быть затем представлено в виде свертки функции импульса $m(t)$ (и ее производных по времени) и функции $A(M, t)$ (и ее производных).

Для простоты рассмотрим частный случай сред с одинаковым коэффициентом затухания:

$$\chi_1 = \chi_2 = \chi, \quad \chi_j = \eta_0 \sigma_j / (2\varepsilon_{rj}). \quad (4.18)$$

В таких средах параметр n будет действительным и не будет зависеть от параметра преобразования Лапласа p : $n = (\varepsilon_{r2} / \varepsilon_{r1})^{1/2}$. В результате коэффициент q_m также не будет зависеть от p . В таких средах, как было показано выше, выполнено условие разложимости функции g_2 в степенной ряд, и для них можно сразу выписать обратное преобразование Лапласа выражения (4.16), воспользовавшись результатами для однородной среды. Напомним, что в предыдущем разделе для случая однородной среды мы имели каноническое преобразование:

$$\Phi_0(M, t) = L^{-1}(H_0^{(1)}[rk_1(p)]) = \eta(t - t_r) \cdot A_0(t_r, t),$$

$$A_0(t_r, t) = \frac{2}{\pi i} \cdot \exp(-\chi t) \cdot \operatorname{ch}(\chi \sqrt{t^2 - t_r^2} / \sqrt{t^2 - t_r^2}),$$

$$\text{где } \eta(t - t_r) = \begin{cases} 0, & t < t_r, \\ 1, & t > t_r, \end{cases} \quad t_r = r \sqrt{\varepsilon_{r1}}; \quad r = \sqrt{y^2 + z^2}; \quad M = M(r);$$

L^{-1} — оператор обратного преобразования Лапласа; переменная времени t нормирована так, что ее размерность равна размерности оптического пути.

В результате имеем (в приближении геометрической оптики):

$$A(M, t) \cong \Phi_0(M, t)|_{R_0} + 2 \sum_{m=1}^{\infty} q_m^m \Phi_0(M, t)|_{R_m}, \quad (4.19)$$

где

$$\Phi_0(M, t)|_{R_m} = \eta(t - R_m \sqrt{\varepsilon_{r1}}) \cdot A_0(R_m \sqrt{\varepsilon_{r1}}, t).$$

Выражение (4.19) иллюстрирует отмеченный выше физический смысл слагаемых с номером m , соответствующих волнам, испытавшим m отражений от границы раздела двух сред. Каждое из таких слагаемых «включается» только в момент времени $t > R_m \sqrt{\varepsilon_{r1}}$. Коэффициент q_m соответствует коэффициенту отражения от границы раздела двух сред. При $q_m > 0$ отражение происходит с сохранением фазы волны, а при $q_m < 0$ — с изменением фазы волны на π при каждом отражении (последний случай имеет место при $n^2 \ll 1$).

Боковая волна

Ограничимся исследованием случая, когда выполнено условие (4.18). В ситуации, когда $n < 1$, $\theta_m > \delta = \arcsin n$, в интеграле (4.8) при деформации контура Γ в контур скорейшего спуска затрагивается точка ветвления $\theta_b = \delta$ [2, 20], поэтому при оценке интеграла (4.8), наряду с (4.12), возникает дополнительное слагаемое, имеющее смысл боковой волны и представляющее собой интеграл по берегам разреза:

$$A_m^{(\text{lat})}(M, p) = \frac{1}{\pi} \int_{i\infty}^{\delta} q_L^m e^{ik_1 R_m \cos(\theta - \theta_m)} d\theta +$$

$$+\frac{1}{\pi} \int_{\delta}^{i\infty} q_R^m e^{ik_1 R_m \cos(\theta - \theta_m)} d\theta = \frac{1}{\pi} \int_{\delta}^{i\infty} \Phi_m(\theta) e^{ik_1 R_m \cos(\theta - \theta_m)} d\theta,$$

$$\Phi_m(\theta) = q_R^m - q_L^m,$$

где индексами L и R помечены левый и правый берега разреза, причем

$$q_L = q_m | \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta}, \quad q_R = q_m | - \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta}.$$

Выпишем вид функций $\Phi_m(0)$ для $m=1$ и 2:

$$\begin{aligned} \Phi_1(\theta) &= \frac{n^2 \cos \theta + \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta}}{n^2 \cos \theta - \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta}} + \frac{n^2 \cos \theta - \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta}}{n^2 \cos \theta + \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta}} = \\ &= \frac{4n^2 \cos \theta \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta}}{n^4 \cos^2 \theta - n^2 + \sin^2 \theta}, \\ \Phi_2(\theta) &= \left(\frac{n^2 \cos \theta + \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta}}{n^2 \cos \theta - \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta}} \right)^2 + \left(\frac{n^2 \cos \theta - \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta}}{n^2 \cos \theta + \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta}} \right)^2 = \\ &= \frac{8(n^4 \cos^2 \theta + n^2 - \sin^2 \theta) n^2 \cos \theta \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta}}{(n^4 \cos^2 \theta - n^2 + \sin^2 \theta)^2}. \end{aligned}$$

Путь интегрирования при вычислении интеграла по разрезу деформируем так, чтобы от точки разветвления δ он шел по линии, на которой экспонента под интегралом быстрее всего спадает. Этот путь определяем по уравнениям

$$\operatorname{Re} \cos(\theta - \theta_m) = \cos(\theta_m - \delta), \quad \operatorname{Im} \cos(\theta - \theta_m) > 0,$$

или, воспользовавшись соотношением

$$\cos(\theta - \theta_m) = \cos(\theta' - \theta_m) \operatorname{ch} \theta'' - i \sin(\theta' - \theta_m) \operatorname{sh} \theta'',$$

получим уравнение для определения зависимости $\theta' = \theta'(\theta'')$ вдоль линии интегрирования:

$$\cos(\theta' - \theta_m) \operatorname{ch} \theta'' = \cos(\theta_m - \delta) = \operatorname{const},$$

$$0 < \theta'' < \infty, \quad \theta'(0) = \delta, \quad \theta'(\infty) = \frac{\pi}{2} + \theta_m,$$

$$\begin{aligned} A_m^{(\text{lat})}(M, p) &= \frac{1}{\pi} e^{ik_1 R_m \cos(\delta - \theta_m)} \int_0^\infty \hat{\Phi}_m(\theta) e^{-k_1 R_m \sin(\theta_m - \delta) \operatorname{sh} \theta''} \times \\ &\times \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta} (i + d\theta' / d\theta'') d\theta'', \end{aligned}$$

где для функции $\hat{\Phi}_m(\theta)$ имеем представление:

$$\Phi_m(\theta) = \hat{\Phi}_m(\theta) \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta}.$$

Значение этого интеграла в первом приближении определяется поведением подынтегрального выражения при малых θ'' . При $\theta'' \approx 0$

$$\begin{aligned} \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta} &= \sqrt{n^2 - (\sin^2 \theta' \operatorname{ch} \theta'' + i \cos \theta' \operatorname{sh} \theta'')^2} \approx \\ &\approx \sqrt{n^2 - (n + i \cos \delta \theta'')^2} \approx -e^{-i\pi/4} \sqrt{2n \cos \delta \theta''}, \end{aligned}$$

так как $\operatorname{Im} \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta} > 0$. Исследуемый интеграл в случае, когда разность $\theta_m - \delta$ не слишком мала, в первом приближении определяется следующим выражением:

$$\int_0^\infty \exp(-\rho \theta'') \sqrt{\theta''} d\theta'' = \frac{1}{2} \sqrt{\pi/p^3}.$$

Отсюда получаем приближенное значение

$$\begin{aligned} A_m^{(\text{lat})}(M, p) &\cong \\ &\cong \frac{-i}{2\pi} e^{ik_1 R_m \cos(\theta_m - \delta)} \hat{\Phi}_m(\delta) e^{-i\pi/4} \sqrt{2n\pi \cos \delta} [k_1 R_m \sin(\theta_m - \delta)]^{-3/2}. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Нетрудно показать, что $\hat{\Phi}_m(\delta) = \frac{4m}{n^2 \cos \delta}$. Для этого воспользуемся также асимптотикой:

$$H_0^{(1)}[k_1 R_m \cos(\theta_m - \delta)] \cong \left(\frac{2}{\pi i k_1 R_m} \right)^{1/2} \exp[ik_1 R_m \cos(\theta_m - \delta)],$$

в результате получим

$$A_m^{(\text{lat})}(M, p) \cong \frac{-i}{k_1 R_m} H_0^{(1)}[k_1 R_m \cos(\theta_m - \delta)] Q_m, \quad (4.21)$$

где

$$Q_m = 2m \left(\frac{\cos(\theta_m - \delta)}{n^3 \cos \delta \sin^3(\theta_m - \delta)} \right)^{1/2}.$$

Найдем обратное преобразование Лапласа функции (4.21). Обозначим $\rho = R_m \cos(\theta_m - \delta)$ и перепишем выражение (4.20) в виде

$$A_m^{(\text{lat})}(M, p) \cong \frac{-i}{k_1 R_m} Q_m \left(\frac{2}{\pi i k_1 R_m} \right)^{1/2} \exp(ik_1 \rho),$$

$$\frac{\partial}{\partial \rho} A_m^{(\text{lat})}(M, p) \cong \frac{1}{R_m} Q_m \left(\frac{2}{\pi i k_1 R_m} \right)^{1/2} \exp(ik_1 \rho),$$

где

$$\exp(ik_1 \rho) \cong \left(\frac{2 \cos(\theta_m - \delta)}{\pi i k_1 \rho} \right)^{-1/2} H_0^{(1)}(k_1 \rho).$$

Очевидно, при $\rho \rightarrow \infty$ $A_m^{(\text{lat})}(M, p) \rightarrow 0$. В результате имеем следующее представление боковой волны (при $0 < \theta_m - \delta < \pi/2$):

$$A_m^{(\text{lat})}(M, p) \cong \frac{-1}{R_m} Q_m \int_{\rho}^{\infty} \left(\frac{\rho}{R_m \cos(\theta_m - \delta)} \right)^{1/2} H_0^{(1)}(k_1 \rho) d\rho,$$

из которого несложно получить обратное преобразование Лапласа для боковой волны, используя результаты для однородной среды:

$$\begin{aligned} A_m^{(\text{lat})}(M, t) &\cong \frac{-1}{R_m} Q_m \int_{\rho}^{\infty} \left(\frac{\rho}{R_m \cos(\theta_m - \delta)} \right)^{1/2} \Phi_0(\rho, t) d\rho = \\ &= -\frac{2Q_m \tilde{R}_m^{-3/2} e^{-xt}}{\pi i \sqrt{\cos(\theta_m - \delta)}} \Phi^{(\text{lat})}(\tilde{\rho}, t), \end{aligned} \quad (4.22)$$

где

$$\Phi^{(\text{lat})}(\tilde{\rho}, t) = \int_{\tilde{\rho}}^{\infty} \sqrt{\tilde{\rho}'} \eta(t - \tilde{\rho}') \operatorname{ch}(\chi \sqrt{t^2 - \tilde{\rho}'^2}) d\tilde{\rho}' / \sqrt{t^2 - \tilde{\rho}'^2};$$

$$\tilde{\rho} = \rho \sqrt{\varepsilon_{r1}} = \tilde{R}_m \cos(\theta_m - \delta); \quad \tilde{R}_m = R_m \sqrt{\varepsilon_{r1}}.$$

После замены переменных $q^2 = t^2 - \tilde{\rho}'^2$ получим

$$\begin{aligned} \Phi^{(\text{lat})}(\tilde{\rho}, t) &= \eta(t - \tilde{\rho}) \int_{\tilde{\rho}}^t \sqrt{\tilde{\rho}'} \operatorname{ch}(\chi \sqrt{t^2 - \tilde{\rho}'^2}) d\tilde{\rho}' / \sqrt{t^2 - \tilde{\rho}'^2} = \\ &= \eta(t - \tilde{\rho}) \int_0^{\sqrt{t^2 - \tilde{\rho}^2}} \operatorname{ch}(\chi q) (t^2 - q^2)^{-1/4} dq. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Отсюда следует, что боковая волна появляется при $t = \tilde{\rho}$.

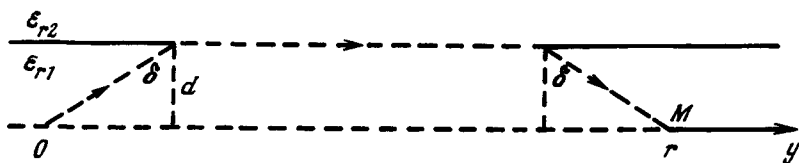


Рис. 4.7. Траектория распространения боковой волны вблизи границы раздела двух сред, $m=1$

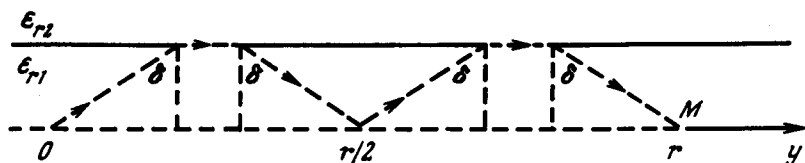


Рис. 4.8. Траектория распространения боковой волны вблизи границы раздела двух сред, $m=2$

Поясним смысл величины $\tilde{\rho}$:

$$\begin{aligned} \tilde{\rho} &= \sqrt{\varepsilon_{r1}} R_m \cos(\theta_m - \delta) = R_m [\sqrt{\varepsilon_{r1}} \cos(\theta_m) \cos \delta + \\ &+ \sqrt{\varepsilon_{r2}} \sin(\theta_m)] = m [2d \sqrt{\varepsilon_{r1} - \varepsilon_{r2}} + \frac{r}{m} \sqrt{\varepsilon_{r2}}], \end{aligned} \quad (4.24)$$

так как $\sin \theta_m = r/R_m$, $\cos \theta_m = 2md/R_m$,

$$\sin \delta = \sqrt{\varepsilon_{r2}/\varepsilon_{r1}}, \quad \cos \delta = \sqrt{1 - \varepsilon_{r2}/\varepsilon_{r1}}.$$

Применяя формулу (4.24), при $m=1$ получаем, что величина $\tilde{\rho}|_{m=1}$ равна оптическому пути от источника (точка с полярной координатой $r=0$) в точку наблюдения M (точка с координатой $Y_m=r$) в форме равнобочной трапеции с нижним основанием длины r , соответствующим пути прямого сигнала, и с верхним основанием, лежащим на границе раздела двух сред (рис. 4.7).

При $m>1$, согласно анализу, выполненному С.Б. Поповым [4], оптический путь $\tilde{\rho}|_m$ имеет форму m стоящих рядом равнобочных трапеций (рис. 4.8), вдоль которых распространяется сигнал от источника в точку приема M при наличии границы раздела двух сред. Волна при этом испытывает $m-1$ промежуточное отражение от идеально проводящей плоскости $z=0$. Такие волны будем называть боковыми волнами типа m .

С ростом числа m угол $\theta_m = \arctg\left(\frac{r}{2md}\right)$ уменьшается до нуля, и наступает момент, когда нарушается условие существования боковой волны: $\theta_m > \delta$. Поэтому, очевидно, боковые волны типа m существуют (если выполнены условия их существования) лишь для малых номеров m .

4.4. ТРЕХМЕРНЫЕ МОДЕЛИ ЗОНДОВ СКИ В ТРЕХСЛОЙНЫХ СРЕДАХ

Трехмерными (3D) моделями зондов со сверхкоротким импульсным (СКИ) возбуждением диполями магнитного или электрического типов мы называем конфигурацию плоскостистой полубесконечной среды, ограниченной с одной стороны идеально проводящей плоскостью $z=0$ при возбуждении среды горизонтальными диполями. В этом случае мы имеем дело с электромагнитными полями, пространственное распределение которых зависит от всех трех координат x, y, z . Еще более сложной 3D-моделью зонда СКИ является возбуждение идеально проводящего цилиндра в слоисто-неоднородных средах диполями, расположенными вблизи поверхности цилиндра. Эта задача будет рассмотрена в дальнейшем.

В соответствии с различными конструктивными особенностями зондов СКИ возбуждение плоской трехслойной среды производится различными типами диполей, расположенных вблизи поверхности зонда в точке $(x, y, z) = (0, 0, h)$. Для каждого из них строятся аналитические представления волновых полей в форме интегралов типа Зоммерфельда.

Для исследования нестационарных процессов распространения электромагнитных импульсов в неоднородных околоскважинных зонах горизонтальных стволов рассматривается трехслойная полубесконечная среда, первым слоем которой является буровой раствор (зона проникновения) вблизи поверхности зонда, вторым — продуктивный пласт и третьим — вмещающие породы. Вводится декартова система координат с идеально проводящей плоскостью xu , ось z направлена в глубь среды.

Границами разделов сред являются плоскости Γ_1 и Γ_2 , определяемые следующими уравнениями — граница Γ_1 : $z = d_1$, граница Γ_2 : $z = d_2$ ($0 \leq d_1 \leq d_2$). Таким образом, в выбранной

системе координат среде 1 будет соответствовать область $0 < z < d_1$; среде 2 — область $d_1 < z < d_2$; среде 3 — область $z > d_2$.

Электрические параметры среды α : $\epsilon_{r,\alpha}$, σ_α , μ_0 , $\alpha = 1, 2, 3$, где $\epsilon_{r,\alpha}$ — относительная диэлектрическая проницаемость среды α ; σ_α — проводимость среды α , См/м, $\mu_\alpha = \mu_0$ — магнитная проницаемость вакуума.

Вблизи плоскости $z=0$ расположен нестационарный диполь с моментом $\vec{m}(t) = (m_x(t), 0, 0)$, где $m_x = m_0 f(t) \delta(R)$; m_0 — амплитуда магнитного диполя; $f(t)$ — произвольно заданная функция времени t .

При этом нестационарный момент тока диполя

$$\vec{J}^M(t) = d\vec{m} / dt.$$

Функция $f(t)$ описывает следующие процессы возбуждения электромагнитного поля:

включение монохроматического диполя в момент времени $t=0$; прямоугольный импульс произвольной длительности τ ; гауссов импульс вида $f(t) = \exp \{ [\beta(t - \tau_0)]^2 \}$ и др.

ГОРИЗОНТАЛЬНЫЙ МАГНИТНЫЙ ДИПОЛЬ (HMD)

В идеально проводящей плоскости $z=0$ прорезаны короткие узкие излучающая и приемная щели, параллельные оси x (см. рис. 4.2). Плоскость yz проходит через середину излучающей щели, являющейся, согласно принципу эквивалентности, горизонтальным магнитным диполем с моментом магнитного тока, равным $I^M L = \frac{\partial}{\partial t} m(t)$ и направленным вдоль оси x ; приемная щель находится в точке с координатами $(0, y_m, 0)$ и также направлена вдоль оси x .

Применяя преобразование Лапласа по переменной времени t к уравнениям Максвелла, получим:

$$\vec{J}^M = (J_x, 0, 0), \quad \vec{J}^S = 0,$$

$$J_x(M, p) = F \delta(x) \delta(y) \delta(z-h), \quad F = p m(p),$$

$$\vec{E}(M, p) = -\text{rot } \vec{A}^M,$$

$$\vec{H}(M, p) = -p\epsilon \vec{A}^M + \frac{1}{\mu p} \text{grad div } \vec{A}^M,$$

где векторный потенциал имеет две компоненты:

$$\vec{A}^m(M, p) = (A_x, 0, A_z),$$

удовлетворяющие уравнениям Гельмгольца

$$\Delta A_x + k^2 A_x = -F \delta(z-h) \cdot \delta(x) \delta(y),$$

$$\Delta A_z + k^2 A_z = 0, \quad k = k_j, \quad j = 1, 2, 3.$$

Расстояние от диполя до идеально проводящей поверхности будем полагать в данном случае равным нулю: $h = 0 +$.

Интегральное представление изображения Лапласа потенциалов $A_x^{(j)}$, $A_z^{(j)}$ в среде с номером j имеет вид [16—18]:

$$A_x^{(1)}(M, p) = \frac{F}{4\pi} \int_0^\infty [e^{-\gamma_1 |z-h|} + g_1(\lambda) e^{-\gamma_1 z} + g_2(\lambda) e^{\gamma_1 z}] J_0(\lambda r) \lambda \frac{d\lambda}{\gamma_1},$$

$$A_x^{(2)}(M, p) = \frac{F}{4\pi} \int_0^\infty [g_3(\lambda) e^{-\gamma_2 z} + g_4(\lambda) e^{\gamma_2 z}] J_0(\lambda r) \lambda \frac{d\lambda}{\gamma_2},$$

$$A_x^{(3)}(M, p) = \frac{F}{4\pi} \int_0^\infty [g_5(\lambda) e^{-\gamma_3 z} + J_0(\lambda r) \lambda \frac{d\lambda}{\gamma_3},$$

$$A_z^{(1)}(M, p) = \frac{F}{4\pi} \frac{x}{r} \int_0^\infty [f_1(\lambda) e^{-\gamma_1 z} + f_2(\lambda) e^{\gamma_1 z}] J_1(\lambda r) \lambda^2 \frac{d\lambda}{\gamma_1},$$

$$A_z^{(2)}(M, p) = \frac{F}{4\pi} \frac{x}{r} \int_0^\infty [f_3(\lambda) e^{-\gamma_2 z} + f_4(\lambda) e^{\gamma_2 z}] J_1(\lambda r) \lambda^2 \frac{d\lambda}{\gamma_2},$$

$$A_z^{(3)}(M, p) = \frac{F}{4\pi} \frac{x}{r} \int_0^\infty f_5(\lambda) e^{-\gamma_3 z} J_1(\lambda r) \lambda^2 \frac{d\lambda}{\gamma_3},$$

$$\gamma_\alpha = \gamma_\alpha(\lambda, p) = (\lambda^2 - k_\alpha^2(p))^{1/2}, \quad \operatorname{Re} \gamma_\alpha > 0,$$

$$k_\alpha^2(p) = -p^2 \varepsilon_\alpha(p) \mu, \quad \operatorname{Im} k_\alpha, \quad r = (x^2 + y^2)^{1/2}.$$

Десять неизвестных функций $g_j, f_j, j=1 \div 5$, находятся из условий непрерывности тангенциальных компонент E_x, E_y и H_x, H_y на границах $\Gamma_{1,2}$ разделов двух сред:

из условий $E_x^+ = E_x^-|_{\Gamma_{1,2}}$ следует:

$$\partial A_z^+ / \partial y = \partial A_z^- / \partial y|_{\Gamma_{1,2}},$$

откуда вытекает непрерывность z -компоненты векторного потенциала на этих границах:

$$A_z^+ = A_z^-|_{\Gamma_{1,2}};$$

из условий $E_y^+ = E_y^-|_{\Gamma_{1,2}}$ следует:

$$\partial A_x^+ / \partial z = \partial A_x^- / \partial z|_{\Gamma_{1,2}};$$

из условий $H_x^+ = H_x^-|_{\Gamma_{1,2}}$ следует:

$$k_-^2 A_x^- + \frac{\partial}{\partial x} \operatorname{div} \vec{A}^- = k_+^2 A_x^+ + \frac{\partial}{\partial x} \operatorname{div} \vec{A}^+|_{\Gamma_{1,2}},$$

откуда вытекает соотношение

$$k_-^2 A_x^- = k_+^2 A_x^+|_{\Gamma_{1,2}};$$

а из условий $H_y^+ = H_y^-|_{\Gamma_{1,2}}$ следует:

$$\operatorname{div} \vec{A}^- = \operatorname{div} \vec{A}^+|_{\Gamma_{1,2}}$$

или

$$\frac{\partial}{\partial x} A_x^- + \frac{\partial}{\partial z} A_z^- = \frac{\partial}{\partial x} A_x^+ + \frac{\partial}{\partial z} A_z^+|_{\Gamma_{1,2}}.$$

В результате имеем восемь условий:

$$A_z^{(1)} = A_z^{(2)}|_{z=d_1}, \quad A_z^{(2)} = A_z^{(3)}|_{z=d_2},$$

$$\frac{\partial}{\partial z} A_x^{(1)} = \frac{\partial}{\partial z} A_x^{(2)}|_{z=d_1}, \quad \frac{\partial}{\partial z} A_x^{(2)} = \frac{\partial}{\partial z} A_x^{(3)}|_{z=d_2},$$

$$k_1^2 A_x^{(1)} = k_2^2 A_x^{(2)}|_{z=d_1}, \quad k_2^2 A_x^{(1)} = k_3^2 A_x^{(2)}|_{z=d_2},$$

$$\frac{\partial}{\partial x} (A_x^{(1)} - A_x^{(2)}) = \frac{\partial}{\partial z} (A_z^{(2)} - A_z^{(1)})|_{z=d_1},$$

$$\frac{\partial}{\partial x} (A_x^{(2)} - A_x^{(3)}) = \frac{\partial}{\partial z} (A_z^{(3)} - A_z^{(2)})|_{z=d_2}.$$

Дополнительные два соотношения имеем на плоскости $z=0$ из условий $E_x|_{z=0} = E_y|_{z=0} = 0$:

$$A_z^{(1)}|_{z=0} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial z} A_x^{(1)}|_{z=0} = 0.$$

Конкретный вид функций g_j, f_j см. в работе [4].
Используя соотношения

$$\partial J_0(\lambda r)/\partial r = -\lambda J_1(\lambda r); \quad \frac{\partial}{\partial x} = \frac{x}{R} \frac{\partial}{\partial R};$$

$$G(R, p) = \exp(ik_1 R)/R \equiv \int_0^\infty e^{-\gamma_1 |z-h|} J_0(\lambda r) \lambda \frac{d\lambda}{\gamma_1};$$

$$R = [r^2 + (z-h)^2]^{1/2};$$

$$\frac{\partial G}{\partial R} = (ik_1 R - 1) \exp(ik_1 R)/R^2 \equiv - \int_0^\infty J_1(\lambda r) \lambda^2 \frac{d\lambda}{\gamma_1},$$

имеем:

$$\begin{aligned} A_x^{(1)}(M, p) &= \frac{F}{4\pi} \int_0^\infty [e^{-\gamma_1 z} + (1+g_2) e^{-\gamma_1 z} + g_2 e^{\gamma_1 z}] J_0(\lambda r) \lambda \frac{d\lambda}{\gamma_1} = \\ &= \frac{B}{2\pi} \left[G + \int_0^\infty g_2(\lambda) \operatorname{ch}(\gamma_1 z) J_0(\lambda r) \lambda \frac{d\lambda}{\gamma_1} \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{A}^{(1)} &= \frac{\partial}{\partial x} A_x^{(1)} + \frac{\partial}{\partial z} A_z^{(1)} = \\ &= \frac{F}{4\pi} \frac{x}{r} \left\{ - \int_0^\infty [e^{-\gamma_1 z} + (1+g_2) e^{-\gamma_1 z} + g_2 e^{\gamma_1 z}] J_1(\lambda r) \lambda^2 \frac{d\lambda}{\gamma_1} + \right. \\ &\quad \left. + \int_0^\infty f_2 [e^{-\gamma_1 z} + e^{\gamma_1 z}] J_1(\lambda r) \lambda^2 d\lambda \right\} = \\ &= \frac{F}{2\pi} \frac{x}{r} \left[\frac{\partial G}{\partial r} - \int_0^\infty \left(\frac{g_2}{\gamma_1} - f_2 \right) \operatorname{ch}(\gamma_1 z) J_1(\lambda r) \lambda^2 d\lambda \right]. \end{aligned}$$

Нас интересуют значения x -компоненты магнитного поля $H_x(M)$ в точке наблюдения с координатами $M = (0, y_M, 0)$. Заметим, что в этой точке равны нулю следующие компоненты векторного потенциала и магнитного поля:

$$A_z^{(1)}(0, y_M, 0, p) = 0, \quad H_y(0, y_M, 0, p) = 0, \quad H_z(0, y_M, 0, p) = 0.$$

Принимая во внимание все предыдущие соотношения, находим изображение Лапласа x -компоненты магнитного поля:

$$\begin{aligned} H_x(0, y_M, 0, p) &= -p \varepsilon_1 A_x^{(1)} + \frac{1}{p \mu_0} \frac{\partial}{\partial x} \operatorname{div} \vec{A}^{(1)} = \\ &= \frac{F}{2\pi} \left\{ -p \varepsilon_1 \left[G(R, p) + \int_0^\infty g_2 J_0(\lambda r) \lambda \frac{d\lambda}{\gamma_1} \right] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{p \mu_0 r} \left[\frac{\partial G(R, p)}{\partial r} + \int_0^\infty (f_2 - g_2 / \gamma_1) J_1(\lambda r) \lambda^2 d\lambda \right] \right\}, \end{aligned}$$

где $R = y_M$.

Искомую компоненту магнитного поля как функцию времени получаем с помощью обратного преобразования Лапласа:

$$H_x(M, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha - i\infty}^{\alpha} e^{pt} H_x(M, p) dp.$$

Используя соотношение $H_x(M, \bar{p}) = \overline{H_x(M, p)}$, формулу обращения Лапласа можно записать как

$$H_x(M, t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \operatorname{Re} [\exp(\alpha + i\omega) H_x(M, \alpha + i\omega)] d\omega.$$

Из этой формулы видно, что x -компонента магнитного поля будет действительной функцией.

На рис. 4.9 изображен отклик поля H_x в двухслойной среде со сравнительно тонким первым слоем $d = 0,1$ м, имеющим большую проводимость $\sigma_1 = 1$ См/м, $\varepsilon_{r1} = 40$ ($\varepsilon_{r2} = 4$, $\sigma_2 = 0,01$ См/м), на возбуждение магнитного диполя гауссовым импульсом с $\beta = 5$, $\tilde{\tau}_0 = 1$, $m_0 = 1$ /с. Первый сигнал, достигающий точки $M(0, y_m, 0)$ с $y_m = 0,5$ м, обусловлен боковой волной, проходящей путь до точки M в форме равнобоковой трапеции (см. рис. 4.8) сначала поперек слоя толщиной 0,1 м, затем проходящей в виде поверхностной волны по среде 2 путь

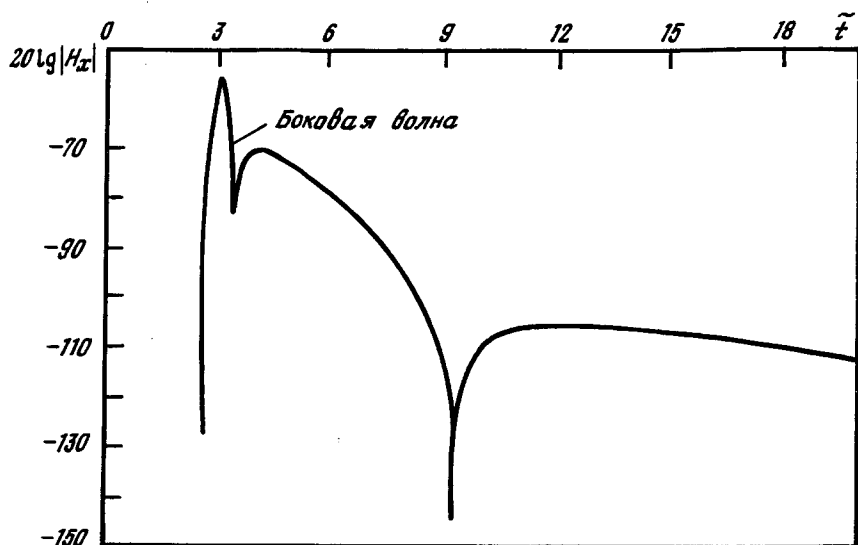


Рис. 4.9. Отклик поля H_x на возбуждение гауссовым импульсом горизонтального магнитного диполя $m_0=1/c$ в двухслойной среде с толщиной первого слоя $d=0,1$ м ($\epsilon_{r1}=40$, $\sigma_1=1$ См/м; $\epsilon_{r2}=4$, $\sigma_2=0,01$ См/м) в точке $M(0, y_m, 0)$ при $y_m=0,5$ м; время $t=c t_{\text{вс}}$

длиной $\sim 0,5$ м и затем просачивающейся через слой 1 в точку приема M в момент времени $\tilde{t} \approx 3$. Максимальное значение амплитуды импульса прямой волны, проходящей путь по среде 1, достигает точки M в момент времени $\tilde{t} \approx 4$. Здесь мы видим выполнение вариационного принципа Ферма о траектории, проходимой светом за кратчайшее время из одной точки неоднородной среды в другую.

На рис. 4.10 приведены для сравнения отклики поля H_x в трехслойной (кривая 3) и двухслойной (кривая 2) средах. Кривая 1 имеет вспомогательный характер и относится к двухслойной среде, представляя вклад прямой волны и многократно отраженных волн от первой границы раздела сред. Электрофизические параметры первого и второго слоев в обеих средах совпадают и составляют соответственно: $\epsilon_{r1}=80$, $\sigma_1=1$ См/м; $\epsilon_{r2}=9$, $\sigma_2=0,01$ См/м, толщина первого слоя одна и та же: $d_1=0,1$ м. В трехслойной среде расстояние до границы второго слоя $d_2=0,5$ м, выше которой располагается третий слой с $\epsilon_{r3}=36$, $\sigma_3=1$ См/м. Возбуждение каждой среды

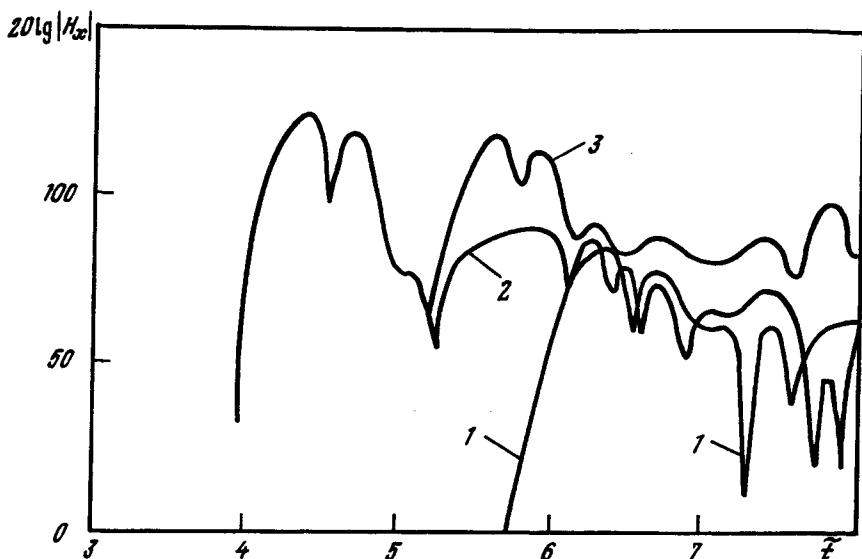


Рис. 4.10. Отклики поля H_x в трехслойной (кривая 3) и двухслойной (кривая 2) средах.

Кривая 1 относится к двухслойной среде и представляет вклад прямой волны и многократно отраженных волн от первой границы раздела сред ($\epsilon_{r1}=80$, $\sigma_1=1$ См/м; $\epsilon_{r2}=9$, $\sigma_2=0,01$ См/м; $\epsilon_{r3}=36$, $\sigma_3=1$ См/м; $d_1=0,1$ м, $d_2=0,5$ м). Источник — магнитный диполь с параметрами гауссового импульса $\beta=5$ и $\tilde{\tau}_0=1$, $m_0=1$

производится магнитным диполем с параметрами гауссового импульса $\beta=5$ и $\tilde{\tau}_0=1$, $m_0=1$.

На рис. 4.10 первый сигнал, достигающий точки наблюдения $M(0, y_m, 0)$ с $y_m=0,6$ м, является боковой волной, порожденной границей раздела первого и второго слоев. На кривых 2 и 3 этот сигнал в виде двугорбой волны появляется в промежуток времени $\tilde{t} \approx 4 \div 5$. В более поздние времена картина поля в двухслойной среде определяется суперпозицией близких (по времени прихода) кратных боковых и многократно отраженных волн от границы слоя. В трехслойной среде картина волнового поля совершенно другая, поскольку вслед за первой боковой волной приходит сигнал, отразившийся от второй границы раздела сред. Время прихода этого сигнала и амплитуда, наряду с известными параметрами первого сигнала, позволяют вычислить расстояние до второй границы.

Таким образом, выделение и анализ различных типов волн, возбуждаемых и принимаемых прибором СКИ, позволяет в принципе решать проблему проводки и геофизических исследований горизонтальных скважин.

ВЕРТИКАЛЬНЫЙ МАГНИТНЫЙ ДИПОЛЬ (VMD)

При возбуждении трехслойной среды вертикальным магнитным диполем электромагнитное поле можно представить в виде:

$$\vec{J}^m = (0, 0, J_z),$$

$$J_z(M, p) = F \delta(x) \delta(y) \delta(z-h), \quad F = p m(p),$$

$$\vec{E}(M, p) = -\text{rot } \vec{A}^m,$$

$$\vec{H}(M, p) = -p\epsilon \vec{A}^m + \frac{1}{\mu p} \text{grad div } \vec{A}^m.$$

Из основных соотношений электродинамики следует, что векторный потенциал в данном случае будет иметь только одну z -компоненту, $\vec{A}^m(M, p) = (0, 0, A_z)$, причем A_z удовлетворяет уравнению

$$\Delta A_z + k^2 A_z = -F \delta(z-h) \cdot \delta(x) \delta(y), \quad k = k_j, j = 1, 2, 3.$$

Изображения Лапласа потенциалов $A_z^{(j)}$ в каждом слое j могут быть представлены в виде интегралов типа Зоммерфельда [16]:

$$A_z^{(1)}(M, p) = \frac{B}{4\pi} \int_0^\infty [e^{-\gamma_1 |z-h|} + g_1(\lambda) e^{-\gamma_1 z} + g_2(\lambda) e^{\gamma_1 z}] J_0(\lambda r) \lambda \frac{d\lambda}{\gamma_1},$$

$$A_z^{(2)}(M, p) = \frac{B}{4\pi} \int_0^\infty [g_3(\lambda) e^{-\gamma_2 z} + g_4(\lambda) e^{\gamma_2 z}] J_0(\lambda r) \lambda \frac{d\lambda}{\gamma_2},$$

$$A_z^{(3)}(M, p) = \frac{B}{4\pi} \int_0^\infty g_5(\lambda) e^{-\gamma_3 z} J_0(\lambda r) \lambda \frac{d\lambda}{\gamma_3},$$

$$\gamma_\alpha = \gamma_\alpha(\lambda, p) = (\lambda^2 - k_\alpha^2(p))^{1/2}, \quad \text{Re } \gamma_\alpha > 0,$$

$$k_\alpha^2(p) = -p^2 \epsilon_\alpha(p) \mu, \quad \text{Im } k_\alpha, \quad r = (x^2 + y^2)^{1/2}.$$

Пять неизвестных функций g_n , $n = 1 \div 5$, находятся из условий непрерывности тангенциальных компонент E_x , E_y и H_x , H_y на границах $\Gamma_{1,2}$ разделов двух сред:
из условий $E_{x,y}^+ = E_{x,y}^-|_{\Gamma_{1,2}}$ следует

$$A_z^+ = A_z^-|_{\Gamma_{1,2}};$$

из условий $H_{x,y}^+ = H_{x,y}^-|_{\Gamma_{1,2}}$ следует

$$\partial A_z^+ / \partial z = \partial A_z^- / \partial z|_{\Gamma_{1,2}}.$$

Дополнительное условие имеем на плоскости $z=0$, — из условия $E_{x,y}|_{z=0} = 0$ вытекает

$$A_z^{(1)}|_{z=0} = 0.$$

В итоге это приводит к следующим алгебраическим соотношениям между неизвестными функциями g_n , $n = 1, 2, 3, 4, 5$:

$$B_{10} + g_1 + g_2 = 0,$$

$$(A_{10} + g_1) B_{11} + g_2 A_{11} = \alpha_1 (g_3 B_{21} + g_4 A_{21}),$$

$$-(A_{10} + g_1) B_{11} + g_2 A_{11} = -g_3 B_{21} + g_4 A_{21},$$

$$g_3 B_{22} + g_4 A_{22} = \alpha_2 g_5 B_{32},$$

$$-g_3 B_{22} + g_4 A_{22} = -g_5 B_{32},$$

где

$$A_{\alpha\beta} = \exp(\gamma_\alpha d_\beta), \quad B_{\alpha\beta} = \exp(-\gamma_\alpha d_\beta),$$

$$\alpha_1 = \gamma_1 / \gamma_2, \quad s_1 = k_2^2 / k_1^2, \quad \alpha_2 = \gamma_2 / \gamma_3, \quad s_2 = k_3^2 / k_2^2.$$

Эти уравнения совпадают с теми, что мы имели в случае HED, относительно функций g_n , $n = 1 \div 5$. Поэтому можно воспользоваться результатами, полученными для HED:

$$g_1 = -g_2 - B_{10},$$

$$g_2 = 2 \delta_1 \operatorname{sh}(\gamma_1 h) Q,$$

$$Q = Q(p) = [(\alpha_2 + 1)(\alpha_1 - 1) + (\alpha_2 - 1)(\alpha_1 + 1) \delta_2] / D,$$

$$D = (\alpha_2 + 1)[\alpha_1 + 1 + (\alpha_1 - 1) \delta_1] + (\alpha_2 - 1)[\alpha_1 - 1 + (\alpha_1 + 1) \delta_1] \delta_2,$$

$$\delta_1 = \exp[-2\gamma_1 d_1], \quad \delta_2 = \exp[-2\gamma_2 (d_2 - d_1)].$$

В данном случае, как и в случае HED (в отличие от HMD), нельзя положить величину h равной нулю, так как тогда $A_{10} = B_{10} = 1$, и система уравнений будет однородной относительно неизвестных функций $g_1 + A_{10}$, g_2 , g_3 , ..., g_5 : в результате все эти функции обратятся в тождественный нуль (кроме функции g_1 , которая при этом станет равной -1).

Преобразуем интегральные выражения, входящие в определение изображения Лапласа z -компоненты магнитного поля в среде 1:

$$\begin{aligned}
 A_z^{(1)}(M, p) &= \frac{B}{4\pi} \int_0^\infty [e^{-\gamma_1 |z-h|} - e^{-\gamma_1 (h+z)} + \\
 &+ g_2 (e^{\gamma_1 z} - e^{-\gamma_1 z})] J_0(\lambda r) \lambda \frac{d\lambda}{\gamma_1} = \frac{B}{4\pi} [G(R_-, p) - G(R_+, p)] + \\
 &+ \frac{B}{\pi} \int_0^\infty Q(p) \exp(-2\gamma_1 d_1) \operatorname{sh}(\gamma_1 h) \operatorname{sh}(\gamma_1 z) J_0(\lambda r) \lambda \frac{d\lambda}{\gamma_1}, \\
 \frac{\partial}{\partial z} \operatorname{div} \vec{A}^{(1)} &= \frac{\partial^2}{\partial z^2} A_z^{(1)} = \frac{B}{4\pi} \left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} (G(R_-, p) - G(R_+, p)) + \right. \\
 &+ 4 \int_0^\infty Q(p) \gamma_1 \exp(-2\gamma_1 d_1) \operatorname{sh}(\gamma_1 h) \operatorname{sh}(\gamma_1 z) J_0(\lambda r) \lambda d\lambda \Big],
 \end{aligned}$$

где

$$G(R, p) = \exp(ik_1 R) / R, \quad R_\pm = [r^2 + (z \pm h)^2]^{1/2}.$$

При данном типе возбуждения (VMD) нас интересуют значения z -компоненты магнитного поля в точке наблюдения с координатами $(0, y_M, h)$. Заметим, что x -компонента магнитного поля в данной точке равна нулю:

$$H_x(0, y_M, h, p) = 0.$$

Принимая во внимание приведенные выше соотношения, получаем изображение Лапласа z -компоненты магнитного поля:

$$\begin{aligned}
H_z(0, y_M, 0, p) = & -p\varepsilon_1 A_z^{(1)} + \frac{1}{p\mu_0} \frac{\partial}{\partial z} \operatorname{div} \vec{A}^{(1)} = \\
= & \frac{F}{4\pi} \left\{ -p\varepsilon_1 \left[G(R_-, p) - G(R_+, p) + \right. \right. \\
& + 4 \int_0^\infty Q(p) \exp(-2\gamma_1 d_1) \operatorname{sh}^2(\gamma_1 h) J_0(\lambda r) \lambda \frac{d\lambda}{\gamma_1} \Big] + \\
& + \frac{1}{p\mu_0} \left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} (G(R_-, p) - G(R_+, p)) + \right. \\
& \left. \left. + 4 \int_0^\infty Q(p) \gamma_1 \exp(-2\gamma_1 d_1) \operatorname{sh}^2(\gamma_1 h) J_0(\lambda r) \lambda d\lambda \right] \right\},
\end{aligned}$$

где $r = R_- = y_M$, $R_+ = (y_M^2 + 4h^2)^{1/2}$.

ГОРИЗОНТАЛЬНЫЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ДИПОЛЬ (НЕР)

Данный тип возбуждения применяется при создании приемо-передающих антенных решеток с электрическими диполями, продольно или поперечно расположенных вблизи идеально проводящей цилиндрической поверхности зонда СКИ.

Изображение Лапласа электромагнитного поля, возбуждаемого горизонтальным электрическим диполем в трехслойной полубесконечной среде, имеет следующий вид:

$$\vec{J}^0 = (J_x, 0, 0),$$

$$J_x(M, p) = F \delta(z-h) \cdot \delta(x) \delta(y), \quad F = p m(p),$$

$$\vec{H}(M, p) = \operatorname{rot} \vec{A}^0,$$

$$\vec{E}(M, p) = -p\mu \vec{A}^0 + \frac{1}{\varepsilon p} \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{A}^0.$$

Из основных соотношений электродинамики находим, что векторный потенциал в рассматриваемом случае имеет две компоненты: $\vec{A}^0(M, p) = (A_x, 0, A_z)$ [10]. Изображения Лапласа компонент векторного потенциала $A_x^{(j)}$, $A_z^{(j)}$ в среде j могут быть представлены в виде, совпадающем с тем, что мы имели

для НМД (однако входящие в представление НЕД функции $g_n, f_n, n = 1 \div 5$ являются другими):

$$A_x^{(1)}(M, p) = \frac{F}{4\pi} \int_0^\infty [e^{-\gamma_1 |z-h|} + g_1(\lambda) e^{-\gamma_1 z} + g_2(\lambda) e^{\gamma_1 z}] J_0(\lambda r) \lambda \frac{d\lambda}{\gamma_1},$$

$$A_x^{(2)}(M, p) = \frac{F}{4\pi} \int_0^\infty [g_3(\lambda) e^{-\gamma_2 z} + g_4(\lambda) e^{\gamma_2 z}] J_0(\lambda r) \lambda \frac{d\lambda}{\gamma_2},$$

$$A_x^{(3)}(M, p) = \frac{F}{4\pi} \int_0^\infty g_5(\lambda) e^{-\gamma_3 z} J_0(\lambda r) \lambda \frac{d\lambda}{\gamma_3},$$

$$A_z^{(1)}(M, p) = \frac{F}{4\pi} \frac{x}{r} \int_0^\infty [f_1(\lambda) e^{-\gamma_1 z} + f_2(\lambda) e^{\gamma_1 z}] J_1(\lambda r) \lambda^2 \frac{d\lambda}{\gamma_1},$$

$$A_z^{(2)}(M, p) = \frac{F}{4\pi} \frac{x}{r} \int_0^\infty [f_3(\lambda) e^{-\gamma_2 z} + f_4(\lambda) e^{\gamma_2 z}] J_1(\lambda r) \lambda^2 \frac{d\lambda}{\gamma_2},$$

$$A_z^{(3)}(M, p) = \frac{F}{4\pi} \frac{x}{r} \int_0^\infty f_5(\lambda) e^{-\gamma_3 z} J_1(\lambda r) \lambda^2 \frac{d\lambda}{\gamma_3},$$

$$\gamma_\alpha = \gamma_\alpha(\lambda, p) = (\lambda^2 - k_\alpha^2(p))^{1/2}, \quad \operatorname{Re} \gamma_\alpha > 0,$$

$$k_\alpha^2(p) = -p^2 \varepsilon_\alpha(p) \mu, \quad \operatorname{Im} k_\alpha > 0, \quad r = (x^2 + y^2)^{1/2}.$$

Десять неизвестных функций $g_n, f_n, n = 1 \div 5$ находятся из условий непрерывности тангенциальных компонент E_x, E_y и H_x, H_y на границах $\Gamma_{1,2}$ разделов двух сред: из условий $E_x^+ = E_{x|\Gamma_{1,2}}^-$ следует

$$A_x^+ = A_{x|\Gamma_{1,2}}^-;$$

из условий $E_y^+ = E_{y|\Gamma_{1,2}}^-$ вытекает

$$k_+^2 \operatorname{div} \vec{A}^+ = k_-^2 \operatorname{div} \vec{A}_{|\Gamma_{1,2}}^-;$$

из условий $H_x^+ = H_{x|\Gamma_{1,2}}^-$ следует

$$A_z^+ = A_{z|\Gamma_{1,2}}^-;$$

а из условий $H_y^+ = H_{y|\Gamma_{1,2}}^-$ вытекает

$$\frac{\partial}{\partial z} A_x^+ = \frac{\partial}{\partial z} A_{x|\Gamma_{1,2}}^-.$$

Это дает восемь условий. Дополнительные два условия имеем на идеально проводящей плоскости $z=0$, для которой из условий $E_{x|z=0}=0$ и $E_{y|z=0}=0$ вытекает

$$A_x^{(1)}|_{z=0}=0, \quad \frac{\partial}{\partial z} A_z^{(1)}|_{z=0}=0.$$

Конкретный вид функций g_j, f_j см. в работе [4].

Преобразуем интегральные выражения, входящие в определение изображения Лапласа x -компоненты электрического поля в среде 1:

$$\begin{aligned} A_x^{(1)}(M, p) = & \frac{F}{4\pi} \int_0^\infty [e^{-\gamma_1|z-h|} - e^{-\gamma_1(h+z)} + \\ & + g_2(e^{\gamma_1 z} - e^{-\gamma_1 z})] J_0(\lambda r) \lambda \frac{d\lambda}{\gamma_1} = \frac{B}{4\pi} \left[G(R_-, p) - G(R_+, p) + \right. \\ & \left. + 4 \int_0^\infty Q_x \exp(-2\gamma_1 d_1) \operatorname{sh}(\gamma_1 h) \operatorname{sh}(\gamma_1 z) J_0(\lambda r) \lambda \frac{d\lambda}{\gamma_1} \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_z^{(1)}(M, p) = & \frac{F}{4\pi r} \int_0^\infty f_2(e^{-\gamma_1 z} + e^{\gamma_1 z}) J_1(\lambda r) \lambda^2 \frac{d\lambda}{\gamma_1} = \\ = & \frac{F}{4\pi} 8 \frac{x}{r} \int_0^\infty Q_z \exp(-2\gamma_1 d_1) \operatorname{sh}(\gamma_1 h) \operatorname{ch}(\gamma_1 z) J_1(\lambda r) \lambda^2 \frac{d\lambda}{\gamma_1}, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \operatorname{div} \vec{A}^{(1)} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial x} A_x^{(1)} + \frac{\partial}{\partial z} A_z^{(1)} \right),$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} A_x^{(1)}|_{x=0} = & \frac{F}{4\pi r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (G(R_-, p) - G(R_+, p)) - \right. \\ & \left. - 4 \int_0^\infty Q_x(p) \exp(-2\gamma_1 d_1) \operatorname{sh}(\gamma_1 h) \operatorname{sh}(\gamma_1 z) J_1(\lambda r) \lambda^2 \frac{d\lambda}{\gamma_1} \right], \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial z} A_z^{(1)}|_{x=0} = \frac{8F}{4\pi r} \int_0^\infty Q_z(p) \exp(-2\gamma_1 d_1) \operatorname{sh}(\gamma_1 h) \operatorname{sh}(\gamma_1 z) J_1(\lambda r) \lambda^2 d\lambda,$$

где

$$G(R, p) = \exp(ik_1 R)/R, \quad R_\pm = [r^2 + (z \pm h)^2]^{1/2}.$$

В данном случае (HED) нас интересуют значения x -компоненты электрического поля в точке наблюдения с координатами $(0, y_M, h)$. Заметим, что в этой точке z -компонента векторного потенциала равна нулю (так как $x_M=0$); y - и z -компоненты электрического поля в данной точке также равны нулю:

$$A_z^{(1)}(0, y_M, 0, p) = 0, \quad E_y(0, y_M, 0, p) = 0, \quad E_z(0, y_M, 0, p) = 0.$$

Нетрудно получить вид изображения Лапласа x -компоненты электрического поля:

$$\begin{aligned} E_x(0, y_M, 0, p) &= -p\mu_0 A_x^{(1)} + \frac{1}{p\epsilon_1} \frac{\partial}{\partial x} \operatorname{div} \vec{A}^{(1)} = \\ &= \frac{F}{4\pi} \left\{ -p\mu_0 \left[G(R_-, p) - G(R_+, p) + \right. \right. \\ &\quad + 4 \int_0^\infty Q_x \exp(-2\gamma_1 d_1) \operatorname{sh}^2(\gamma_1 h) J_0(\lambda r) \lambda \frac{d\lambda}{\gamma_1} \Big] + \\ &\quad + \frac{1}{p\epsilon_1 r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (G(R_-, p) - G(R_+, p)) - \right. \\ &\quad - 4 \int_0^\infty Q_x(p) \exp(-2\gamma_1 d_1) \operatorname{sh}(\gamma_1 h) \operatorname{sh}(\gamma_1 z) J_1(\lambda r) \lambda^2 \frac{d\lambda}{\gamma_1} + \\ &\quad \left. \left. + 8 \int_0^\infty Q_z(p) \exp(-2\gamma_1 d_1) \operatorname{sh}(\gamma_1 h) \operatorname{sh}(\gamma_1 z) J_1(\lambda r) \lambda^2 d\lambda \right] \right\}, \end{aligned}$$

где $r = R_- = y_M$, $R_+ = (y_M^2 + 4h^2)^{1/2}$.

ВЕРТИКАЛЬНЫЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ДИПОЛЬ (VED)

Для вертикального электрического диполя изображение Лапласа электромагнитного поля имеет вид:

$$\vec{J}^3 = (0, 0, J_z),$$

$$J_z(M, p) = F \delta(z-h) \cdot \delta(x) \delta(y), \quad F = pm(p),$$

$$\vec{H}(M, p) = \text{rot } \vec{A}^3,$$

$$\vec{E}(M, p) = -p\mu \vec{A}^3 + \frac{1}{\varepsilon p} \text{grad div } \vec{A}^3.$$

Расстояние от диполя до идеально проводящей поверхности будем полагать в данном случае, как и в случае НМД, равным нулю: $h=0+$.

Векторный потенциал для плоскостной среды имеет только одну компоненту: $\vec{A}^3(M, p) = (0, 0, A_z)$, причем изображение Лапласа этой компоненты $A_z^{(j)}$ в среде j можно представить в виде интеграла типа Зоммерфельда:

$$A_z^{(1)}(M, p) = \frac{F}{4\pi} \int_0^\infty [e^{-\gamma_1 |z-h|} + g_1(\lambda) e^{-\gamma_1 z} + g_2(\lambda) e^{\gamma_1 z}] J_0(\lambda r) \lambda \frac{d\lambda}{\gamma_1},$$

$$A_z^{(2)}(M, p) = \frac{F}{4\pi} \int_0^\infty [g_3(\lambda) e^{-\gamma_2 z} + g_4(\lambda) e^{\gamma_2 z}] J_0(\lambda r) \lambda \frac{d\lambda}{\gamma_2},$$

$$A_z^{(3)}(M, p) = \frac{F}{4\pi} \int_0^\infty g_5(\lambda) e^{-\gamma_3 z} J_0(\lambda r) \lambda \frac{d\lambda}{\gamma_3},$$

$$\gamma_\alpha = \gamma_\alpha(\lambda, p) = (\lambda^2 - k_\alpha^2(p))^{1/2}, \quad \text{Re } \gamma_\alpha > 0,$$

$$k_\alpha^2(p) = -p^2 \varepsilon_\alpha(p) \mu, \quad \text{Im } k_\alpha > 0, \quad r = (x^2 + y^2)^{1/2}.$$

Пять неизвестных функций g_j , $j=1 \div 5$, находятся из условий непрерывности тангенциальных компонент E_x , E_y и H_x , H_y на границах $\Gamma_{1,2}$ разделов двух сред:

из условий $E_{x,y}^+ = E_{x,y}^-|_{\Gamma_{1,2}}$ следует

$$k_+^{-2} \frac{\partial}{\partial z} A_z^+ = k_-^{-2} \frac{\partial}{\partial z} A_z^-|_{\Gamma_{1,2}};$$

из условий $H_{x,y}^+ = H_{x,y|\Gamma_{1,2}}^-$ следует

$$A_z^+ = A_{z|\Gamma_{1,2}}^-.$$

Это дает четыре условия. Дополнительное условие имеем на идеально проводящей плоскости $z=0$, для которой из условия $E_{x,y|z=0}=0$ имеем

$$\frac{\partial}{\partial z} A_{z|z=0}^{(1)} = 0.$$

В итоге получаем следующие алгебраические соотношения между неизвестными функциями $g_j, j=1 \div 5$:

$$1 - g_1 + g_2 = 0,$$

$$(1 + g_1) B_{11} + g_2 A_{11} = \alpha_1 (g_3 B_{21} + g_4 A_{21}),$$

$$s_1 [-(1 + g_1) B_{11} + g_2 A_{11}] = -g_3 B_{21} + g_4 A_{21},$$

$$g_3 B_{22} + g_4 A_{22} = \alpha_2 g_5 B_{32},$$

$$s_2 (-g_3 B_{22} + g_4 A_{22}) = -g_5 B_{32},$$

где

$$A_{\alpha\beta} = \exp(\gamma_\alpha d_\beta), B_{\alpha\beta} = \exp(-\gamma_\alpha d_\beta), \alpha = 1, 2, 3; \beta = 1, 2;$$

$$\alpha_1 = \gamma_1/\gamma_2, s_1 = k_2^2/k_1^2, \alpha_2 = \gamma_2/\gamma_3, s_2 = k_3^2/k_2^2.$$

Функции g_j находятся последовательным исключением:

$$g_3 = 0,5 A_{22} B_{32} g_5 (\alpha_2 + 1/s_2),$$

$$g_4 = 0,5 B_{22} B_{32} g_5 (\alpha_2 - 1/s_2),$$

$$2A_{11}g_2 = 0,5 B_{32}g_5 [A_{22}B_{21}(\alpha_2 + 1/s_2)(\alpha_1 - 1/s_1) + B_{22}A_{21}(\alpha_2 - 1/s_2)(\alpha_1 + 1/s_1)],$$

$$2B_{11}(2 + g_2) = 0,5 B_{32}g_5 [A_{22}B_{21}(\alpha_2 + 1/s_2)(\alpha_1 + 1/s_1) + B_{22}A_{21}(\alpha_2 - 1/s_2)(\alpha_1 - 1/s_1)],$$

$$g_1 = 1 + g_2.$$

Отсюда

$$g_2 = \frac{2}{\Delta} \delta_1 [(s_2 \alpha_2 + 1)(s_1 \alpha_1 - 1) + \delta_2 (s_2 \alpha_2 - 1)(s_1 \alpha_1 + 1)],$$

$$\Delta = (s_2 \alpha_2 + 1) [(s_1 \alpha_1 + 1) - (s_1 \alpha_1 + 1) \delta_1] + (s_2 \alpha_2 - 1) [(s_1 \alpha_1 - 1) - (s_1 \alpha_1 + 1) \delta_1] \delta_2,$$

$$\delta_1 = B_{11}^2 = \exp[-2\gamma_1 d_1], \delta_2 = (B_{22}/B_{21})^2 = \exp[-2\gamma_2 (d_2 - d_1)].$$

Полученный вид функции g_2 совпадает с видом этой функции в случае НМД. В то же время этот случай значительно проще случая НМД, так как в рассматриваемом случае ВЕД векторный потенциал имеет всего одну компоненту.

Преобразуем интегральные выражения, входящие в определение изображения Лапласа z -компоненты электрического поля в среде 1:

$$\begin{aligned} A_z^{(1)}(M, p) &= \frac{F}{4\pi} \int_0^\infty [e^{-\gamma_1 z} + (1 + g_2) e^{-\gamma_1 z} + g_2 e^{\gamma_1 z}] J_0(\lambda r) \lambda \frac{d\lambda}{\gamma_1} = \\ &= \frac{F}{2\pi} \left[G + \int_0^\infty g_2(\lambda) \operatorname{ch}(\gamma_1 z) J_0(\lambda r) \lambda \frac{d\lambda}{\gamma_1} \right], \\ \frac{\partial}{\partial z} \operatorname{div} \vec{A}^{(1)} &= \frac{\partial^2}{\partial z^2} A_z^{(1)} = \frac{F}{2\pi} \left[\frac{\partial^2 G}{\partial z^2} + \int_0^\infty g_2 \operatorname{ch}(\gamma_1 z) J_0(\lambda r) \lambda \gamma_1 d\lambda \right], \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} G(R, p) &= \exp(ik_1 R) / R \equiv \int_0^\infty e^{-\gamma_1 |z-h|} J_0(\lambda r) \lambda \frac{d\lambda}{\gamma_1}; \\ R &= [r^2 + (z-h)^2]^{1/2}. \end{aligned}$$

В данном случае нас интересуют значения z -компоненты электрического поля в точке наблюдения с координатами $(0, y_M, 0)$. Заметим, что в этой точке x - и y -компоненты электрического поля равны нулю:

$$E_x(0, y_M, 0, p) = 0, E_y(0, y_M, 0, p) = 0.$$

Нетрудно получить вид изображения Лапласа z -компоненты электрического поля:

$$\begin{aligned} E_z(0, y_M, 0, p) &= -p \mu_0 A_x^{(1)} + \frac{1}{p \epsilon_1} \frac{\partial}{\partial z} \operatorname{div} \vec{A}^{(1)} = \\ &= \frac{F}{2\pi} \left\{ -p \mu_0 \left[G(R, p) + \int_0^\infty g_2 J_0(\lambda r) \lambda \frac{d\lambda}{\gamma_1} \right] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{p \epsilon_1} \left[\frac{\partial^2 G}{\partial z^2} + \int_0^\infty g_2 J_0(\lambda r) \lambda \gamma_1 d\lambda \right] \right\}, \end{aligned}$$

где $R=r=y_M$.

Изложенные выше алгоритмы расчетов электромагнитных полей в неоднородных средах для различных типов возбуждений реализованы на ЭВМ в виде комплекса прикладных программ.

4.5. АНАЛИТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ТРЕХМЕРНЫХ МОДЕЛЕЙ ЗОНДОВ СКИ В ДВУХСЛОЙНОЙ СРЕДЕ

Исследование распространения электромагнитного импульса, возбуждаемого магнитным диполем, выполним для неоднородного полупространства $z \geq 0$ (рис. 4.11), состоящего из двух слоев: $0 \leq z \leq d$ (слой 1); $d < z < \infty$ (слой 2); d — толщина первого слоя. Источником электромагнитного поля в полупространстве является магнитный диполь, расположенный в начале координат на идеально проводящей плоскости xu , ось диполя совпадает с координатной прямой x (см. рис. 4.11).

Изображения Лапласа векторов электрического и магнитного полей в точке наблюдения $M(x, y, z)$ выражается через изображение векторного потенциала $\vec{A}(M, p)$:

$$\vec{E}(M, p) = -\text{rot } \vec{A}(M, p), \quad \vec{H}(M, p) = -p\epsilon \vec{A}(M, p) + \frac{1}{\mu r} \text{grad div } \vec{A}(M, p),$$

где

$$\vec{A}(M, p) = (A_x, 0, A_z); \quad \epsilon = \epsilon_j(p) = \epsilon_0 \epsilon_{rj} + \sigma_j / p;$$

$j=1, 2$ — номер слоя; $p = \alpha - i\omega$ — параметр преобразования Лапласа.

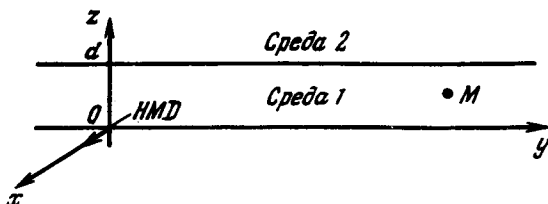


Рис. 4.11. Модель зонда СКИ в двухслойной среде

Изображения компонент векторного потенциала $A_x^{(1)}$, $A_z^{(1)}$ в слое 1 представимы в виде интегралов типа Зоммерфельда [7]:

$$A_x^{(1)}(M, p) = \frac{J_x(p)}{2\pi} \int_0^\infty [\exp(-\gamma_1 z) + g_2(\lambda, p) \operatorname{ch}(\gamma_1 z)] J_0(\lambda r) \lambda \frac{d\lambda}{\gamma_1},$$

$$A_z^{(1)}(M, p) = \frac{J_x(p)}{2\pi} \frac{x}{r} \int_0^\infty f_2(\lambda, p) \operatorname{sh}(\gamma_1 z) J_1(\lambda r) \lambda \frac{d\lambda}{\gamma_1},$$

где

$$\gamma_j = \gamma_j(k, p) = [\lambda^2 - k_j^2]^{1/2}; \quad \operatorname{Re} \gamma_j > 0; \quad r = (x^2 + y^2)^{1/2};$$

$$k_j^2 = [-p^2 \mu_0 \varepsilon_j(p)]^{1/2}; \quad \operatorname{Im} k_j > 0, \quad j = 1, 2;$$

$j_x(p) = pm_x(p)$ — преобразование Лапласа произвольно заданной функции времени источника в виде магнитного тока с моментом $J_x(t) = dm_x(t)/dt$; функции $g_2(\lambda, p)$ и $f_2(\lambda, p)$ для двухслойной среды имеют вид

$$g_2(\lambda, p) = \frac{2(s\alpha - 1)B_1}{s\alpha + 1 - B_1(s\alpha - 1)},$$

$$f_2(\lambda, p) = \frac{4\alpha\lambda(s-1)B_1}{\gamma_2[s\alpha + 1 - B_1(s\alpha - 1)][1 + \alpha - B_1(1 - \alpha)]},$$

$$s = k_2^2/k_1^2, \quad \alpha = \gamma_1/\gamma_2, \quad B_1 = \exp(-2\gamma_1 d).$$

Измеряемой величиной является x -компонента магнитного поля в слое 1 на плоскости (x, y) :

$$H_x^{(1)}(M, p) = -p\varepsilon_1(p) A_x^{(1)} + \frac{1}{\mu p} \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} A_x^{(1)} + \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} A_z^{(1)} \right]. \quad (4.25)$$

Вещественный характер $H_x(M, t)$

Для установления важного свойства, что компонента вектора магнитного поля $H_x(M, t)$ в точке наблюдения M в произвольный момент времени t является действительным числом, выполним в обратном преобразовании Лапласа замену переменной $p = \alpha - i\omega$:

$$H_x(M, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} F(p) dp = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\alpha-i\omega) d\omega =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} [F(\alpha-i\omega) + F(\alpha+i\omega)] d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \operatorname{Re} [F(\alpha-i\omega)] d\omega.$$

Последнее равенство следует из соотношения $F(\bar{p}) = \overline{F(p)}$, которое справедливо благодаря тому, что подынтегральная функция F является рациональной функцией аргумента p и ряда элементарных функций от p : $\varphi_1(p)$, $\varphi_2(p)$, ..., $\varphi_n(p)$, например $\exp(pt)$, $\gamma_1(p)$ и др., каждая из которых обладает свойством, что $\varphi_m(\bar{p}) = \overline{\varphi_m(p)}$, $m=1, 2, \dots, n$. Для функций вида $\gamma_1(p)$ это свойство следует из требования $\operatorname{Re} \gamma_1 > 0$, так как значение $\gamma_1(\bar{p})$ имеет две ветви: $\gamma_1(\bar{p}) = \pm \overline{\gamma_1(p)}$, но указанное требование выделяет ветвь: $\gamma_1(\bar{p}) = \overline{\gamma_1(p)}$ (при наличии дуального условия $\operatorname{Im} \gamma_1 > 0$ мы бы имели другую ветвь: $\gamma_1(\bar{p}) = -\overline{\gamma_1(p)}$).

Асимптотическое представление x -компоненты векторного потенциала $A_x^{(1)}(M, p)$

При исследовании асимптотических решений распространения электромагнитных импульсов в слоистых средах С. Б. Поповым было предложено разложение функции $g_2(\lambda, p)$ в степенной ряд:

$$g_2(\lambda, p) = \frac{2qB_1}{1-qB_1} = 2 \sum_{m=1}^{\infty} (qB_1)^m, \quad q = \frac{s\alpha-1}{s\alpha+1} = \frac{k_j^2 \gamma_1 - k_j^2 \gamma_2}{k_j^2 \gamma_1 + k_j^2 \gamma_2}.$$

Такое разложение, очевидно, будет справедливым при условии $|q| \leq 1$, что эквивалентно условию: $\operatorname{Re}(s\alpha) \geq 0$. Для простоты ограничимся случаем, когда коэффициент s — действительное и положительное число. Тогда последнее условие будет равносильно требованию $\operatorname{Re} \alpha \geq 0$. Покажем, что это требование выполняется. Нетрудно видеть, что функции γ_j имеют вид:

$$\gamma_j = [\lambda^2 - k_j^2]^{1/2} = \alpha_j - i \operatorname{sgn}(\operatorname{Im} k_j^2) \beta_j, \quad \alpha_j, \beta_j \geq 0,$$

$$\operatorname{sgn}(\operatorname{Im} k_j^2) = \operatorname{sgn}(\omega), \text{ так как } \operatorname{Im} k_j^2 = \omega(\sigma_j + 2\alpha \varepsilon_0 \varepsilon_{rj}) \mu,$$

$$\operatorname{Re} \alpha \sim \operatorname{Re}(\gamma_1 \bar{\gamma}_2) = \alpha_1 \alpha_2 + \beta_1 \beta_2 [\operatorname{sgn}(\omega)]^2 \geq 0.$$

В результате разложения функции g_2 имеем:

$$A_x^{(1)}(M, p) = \frac{J_x(p)}{2\pi} \left[G(R, p) + \sum_{m=1}^{\infty} [G_m^-(M, p) + G_m^+(M, p)] \right], \quad (4.26)$$

где

$$G(R, p) = \exp(ik_1 R)/R, \quad R = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2};$$

$$G_m^{\pm}(M, p) = \int_0^{\infty} q^m \exp[-\gamma_1(2md \pm z)] J_0(\lambda r) \lambda \frac{d\lambda}{\gamma_1}, \quad m = 1, 2, \dots$$

Очевидно, $G(R, p) = G_0^+(M, P)$ соответствует прямому сигналу, пришедшему в точку наблюдения M . Покажем, что члены $G_m^+(M, P)$ и $G_m^-(M, P)$, $m > 0$, отвечают волнам, испытавшим m отражений от границы раздела двух сред и соответственно m и $m-1$ отражение от идеально проводящей плоскости xu . Оценим члены с индексом $m > 0$. Для этого воспользуемся представлением

$$J_0(u) = [H_0^{(1)}(u) - H_0^{(1)}(-u)]/2,$$

обозначим $n = n(p) = k_2/k_1$ и сделаем замену переменных [2]:

$$\lambda = k_1 \sin \theta, \quad \gamma_1 = -ik_1 |\cos \theta|, \quad d\lambda = k_1 \cos \theta d\theta.$$

В результате получим

$$G_m^{\pm}(M, p) = \frac{ik_1}{2} \int_{\Gamma} q^m H_0^{(1)}(k_1 r \sin \theta) \exp[ik_1(2mh \pm z) \cos \theta] \sin \theta d\theta, \quad (4.27)$$

$$q = q(\theta, p) = \frac{n^2 \cos \theta - (n^2 - \sin^2 \theta)^{1/2}}{n^2 \cos \theta + (n^2 - \sin^2 \theta)^{1/2}}, \quad \text{Im}(n^2 - \sin^2 \theta)^{1/2} > 0.$$

Путь интегрирования Γ проходит на комплексной плоскости $\theta = \theta' + i\theta''$ и зависит от знака параметра $\omega = -\text{Im } p$; при $\omega > 0$ мы имеем тот же путь, что и в работе [15]:

$$\Gamma = \Gamma^+ = \{\theta' = -\pi/2, +\infty > \theta'' > 0\} + \{-\pi/2 \leq \theta' \leq -\pi/2, \theta'' = 0\} + \{\theta' = \pi/2, 0 > \theta'' > -\infty\},$$

тогда как в случае $\omega < 0$ путь будет как в работе [20]:

$$\Gamma = \Gamma^- = \{\theta' = -\pi/2, -\infty > \theta'' < 0\} + \{-\pi/2 \leq \theta' \leq -\pi/2, \theta'' = 0\} + \{\theta' = \pi/2, 0 < \theta'' < +\infty\}.$$

Для определенности ниже рассмотрим область $\omega > 0$, $\Gamma = \Gamma^+$ (область отрицательных значений ω рассматривается аналогично).

Введем в рассмотрение величины

$$R_m^\pm = [r^2 + (2md \pm z)^2]^{1/2}, \quad \theta_m^\pm = \arctg\left(\frac{r}{2md \pm z}\right),$$

которые имеют физический смысл длины пути, пройденного волной, испытавшей m отражений от границы раздела двух сред, прежде чем попасть в точку наблюдения M . При этом пути R_m^+ и R_m^- содержат соответственно m и m^{-1} отражение от идеально проводящей плоскости xy . Величины $\theta_m^\pm$ соответствуют углам падения волны на границу раздела двух сред при каждом из отражений.

Можно также по-другому интерпретировать введенные величины, удалив идеально проводящую плоскость и дополнив нижнее полупространство $z < 0$ симметрично отображенным относительно плоскости $z = 0$ верхним полупространством $z > 0$. Тогда источник будет расположен симметрично в центре слоя удвоенной толщины $2d$ с двумя границами раздела сред: верхней (L) и нижней (L') (рис. 4.12).

Каждая из величин R_m^+ и R_m^- в этом случае также имеет смысл длины пути, пройденного волной, испытавшей m отражений от границ раздела двух сред, прежде чем попасть в точку наблюдения M . При этом в случае R_m^+ волна на начальном этапе распространяется из источника в сторону отрицательных значений z , и первое отражение происходит от нижней границы L' раздела двух сред, тогда как в случае R_m^- волна выходит из источника в сторону положительных значений z , и первое отражение происходит от верхней границы L раздела двух сред; $\theta_m^\pm$ равен углу падения этой волны на соответствующую границу раздела двух сред при каждом из m отражений.

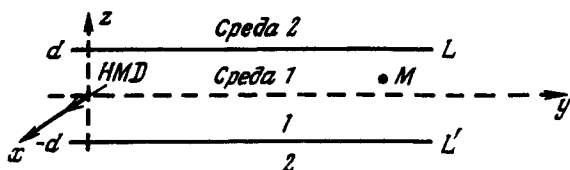


Рис. 4.12. Геометрия зеркально симметричной двухслойной среды

Применив асимптотическое представление функции Ханкеля [2]

$$H_0^{(1)}(u) \simeq \sqrt{2/(\pi u)} \exp[i(u - \pi/4)] [1 + 1/(8iu) + O(u^{-2})],$$

получим

$$G_m^\pm(M, p) = \int_{\Gamma} F(\theta) e^{\rho f(\theta)} d\theta, \quad (4.28)$$

где

$$F(\theta) = e^{i\pi/4} \sqrt{k_1 \sin \theta / (2\pi r)} V(\theta) [1 + 1/(8k_1 r \sin \theta)],$$

$$f(\theta) = ik_1(p) \cos(\theta - \theta_m^\pm), \quad \rho = R_m^\pm, \quad V(\theta) = q^m(\theta, p).$$

Интегралы подобного вида (с произвольной функцией $V(\theta)$) исследовались в работе [20]. Интеграл вида (4.25) при наличии седловой точки θ_s , определяемой уравнением $f'(\theta_s) = 0$, и достаточно больших значений параметра ρ имеет следующую асимптотическую оценку второго порядка точности:

$$\int_{\Gamma} F(\theta) e^{\rho f(\theta)} d\theta \cong F(\theta_s) e^{\rho f(\theta_s)} \left(\frac{-2\pi}{\rho f''(\theta_s)} \right)^{1/2} \left\{ 1 + \frac{1}{2\rho} \left[\frac{f'''}{(f'')^2} \frac{F'}{F} + \frac{f^{IV}}{4(f'')^2} - \frac{5(f''')^2}{12(f'')^3} - \frac{F''}{F f''} \right] \right\}_{|\theta=\theta_s}. \quad (4.29)$$

Для интеграла (4.28) точкой перевала будет значение $\theta_s = \theta_m^\pm$. В результате при больших значениях $\rho = R_m^\pm$ можно получить оценку, отвечающую второму приближению:

$$G_m^\pm(M, p) \cong G_{m1}^\pm(M, p) = G_{m1}^\pm(M, p) + G_m^{\pm(\text{add})}(M, p), \quad (4.30)$$

где слагаемое $G_{m1}^\pm(M, p)$ соответствует первому приближению — приближению геометрической оптики:

$$G_{m1}^\pm(M, p) = \frac{1}{\rho} \exp(ik_1 \rho) V(\theta_s) = G(R_m^\pm, p) q^m(\theta_m^\pm, p), \quad (4.31)$$

а слагаемое $G_m^{\pm(\text{add})}(M, p)$ является членом второго приближения:

$$G_m^{\pm(\text{add})}(M, p) = \frac{1}{2ik_1} \frac{1}{\rho^2} \exp(ik_1 \rho) (V' \operatorname{ctg} \theta + V'')|_{\theta=\theta_s},$$

$$V(\theta_s) = q^m(\theta_m^{\pm}, p), \quad V' = \frac{\partial}{\partial \theta} q^m(\theta, p)|_{\theta_s}, \quad V'' = \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} q^m(\theta, p)|_{\theta_s}.$$

Заметим, что в случае, когда функция $V(\theta)$ является постоянной относительно параметра θ , второе приближение $G_m^{\pm(\text{add})}(M, p)$ равно нулю. В этом случае оценка (4.30) совпадает с оценкой (4.31) и превращается в строгое равенство.

Уточнение приближения геометрической оптики, наряду с учетом второго приближения в методе перевала, может быть произведено также путем добавления волны нового типа, соответствующей боковой волне. Боковая волна математически выражается в виде интеграла по берегам разреза от точки ветвления $\theta_b = \arcsin n$, возникающего в случае $\varepsilon_{2r} < \varepsilon_{1r}$. Исследование боковой волны будет проведено ниже.

Заметим также, что подынтегральное выражение имеет полюса, являющиеся корнями знаменателя $q(\theta, p)$ как функции θ :

$$n^2 \cos \theta + (n^2 - \sin^2 \theta)^{1/2} = 0.$$

Однако, как показано в работе [2], эти полюса не затрагиваются при деформации контура Γ в контур скорейшего спуска, поэтому их не надо учитывать.

Подстановка выражения (4.31) или более точного приближения (4.30) в (4.26) дает асимптотические оценки x -компоненты векторного потенциала $A_x^{(1)}(M, p)$ в среде 1:

в приближении геометрической оптики

$$A_{xI}^{(1)}(M, p) = \frac{J_x(p)}{2\pi} \left[G(R, p) + \sum_{m=1}^{\infty} (G(R_m^{-1}, p) q^m(\theta_m^-, p) + G(R_m^+, p) q^m(\theta_m^+, p)) \right], \quad (4.32)$$

во втором приближении

$$A_{xII}^{(1)}(M, p) = A_{xI}^{(1)}(M, p) - i \frac{J_x(p)}{4\pi k_1} \sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{\exp(ik_1 R_m^-)}{(R_m^-)^2} \Psi(\theta_m^-, p) + \frac{\exp(ik_1 R_m^+)}{(R_m^+)^2} \Psi(\theta_m^+, \vec{p}) \right], \quad (4.33)$$

$$\Psi(\theta, p) = (q^m)' \operatorname{ctg} \theta + (q^m)''.$$

4. Асимптотическая оценка z -компоненты векторного потенциала магнитного поля.

Рассмотрим асимптотическое представление слагаемого $\frac{\partial^2}{\partial x \partial z} A_z^{(1)}(M, p)$, входящего в определение x -компоненты вектора магнитного поля в среде 1.

Это слагаемое можно представить в виде

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial z} A_z^{(1)}(M, p) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} B_z^{(1)}(M, p),$$

где

$$B_z^{(1)}(M, p) = \frac{J_x(p)}{2\pi} \int_0^\infty \tilde{f}_2 \operatorname{ch}(\gamma_1 z) J_0(\lambda r) \lambda \frac{d\lambda}{\gamma_1},$$

причем функция $\tilde{f}_2 = -f_2 \gamma_1 / \lambda$ представлена в виде

$$\begin{aligned} \tilde{f}_2 &= \tilde{f}_2(\lambda, p) = \frac{-4\alpha^2(s-1)B_1}{(s\alpha+1)(1+\alpha)(1-B_1q_1)(1-B_1q_2)} = \\ &= -\frac{4\alpha^2(s-1)B_1}{(s\alpha+1)(1+\alpha)} \left[\sum_{m=0}^\infty (q_1 B_1)^m \right] \left[\sum_{m=0}^\infty (q_2 B_1)^m \right] = 2 \sum_{m=1}^\infty B_1^m A_m, \end{aligned}$$

где использованы обозначения

$$q_1 = q_1(\theta, p) = \frac{s\alpha-1}{s\alpha+1}, \quad q_2 = q_2(\theta, p) = \frac{1-\alpha}{1+\alpha},$$

$$A_1 = A_1(\theta, p) = \frac{-2\alpha^2(s-1)}{(s\alpha+1)(1+\alpha)}, \quad A_m = A_m(\theta, p) = A_1 \frac{q_2^m - q_1^m}{q_2 - q_1}, \quad m > 1.$$

Коэффициент q_1 совпадает с коэффициентом q , фигурирующим при исследовании $A_x^{(1)}$. Отметим также, что знаменатель функции q_2 может обращаться в нуль лишь при $n=1$, поэтому полюса подынтегральной функции будут теми же, что и при исследовании $A_x^{(1)}$.

Вид функции $B_z^{(1)}(M, p)$ аналогичен виду $A_z^{(1)}(M, p)$, а разложение функции $\tilde{f}_2$ аналогично разложению g_2 , поэтому можно сразу выписать соответствующие представления $B_z^{(1)}(M, p)$ (заменяв члены вида q^m на A_m , $m \geq 1$):

$$B_z^{(1)}(M, p) = \frac{J_x(p)}{2\pi} \sum_{m=1}^{\infty} (B_m^-(M, p) + B_m^+(M, p)),$$

где

$$B_m^{\pm}(M, p) = \int_0^{\infty} A_m \exp[-\gamma_1(2mh \pm z)] J_0(\lambda r) \lambda \frac{d\lambda}{\gamma_1}, \quad m=1, 2, \dots \quad (4.34)$$

В приближении геометрической оптики имеем

$$B_m^{\pm}(M, p) \cong B_{m1}^{\pm}(M, p) = G(R_m^{\pm}, p) A_m(\theta_m^{\pm}, p),$$

откуда получаем

$$B_{z1}^{(1)}(M, p) = \frac{J_x(p)}{2\pi} \sum_{m=1}^{\infty} (G(R_m^-, p) A_m(\theta_m^-, p) + G(R_m^+, p) A_m(\theta_m^+, p)), \quad (4.35)$$

где величины $R_m^{\pm}$, $\theta_m^{\pm}$ имеют тот же смысл, что и выше.

Учет точки ветвления $\theta_b = \arcsin n$ в случае $\epsilon_{r,2} < \epsilon_{r,1}$ приводит к появлению боковых волн.

Представим функцию $A_m(\theta, p)$, учитывая, что

$$\alpha = \cos \theta / (n^2 - \sin^2 \theta)^{1/2}, \quad s = n^2, \quad \text{Im}(n^2 - \sin^2 \theta)^{1/2} > 0:$$

$$A_1(\theta, p) = \frac{-2(n^2 - 1) \cos^2 \theta}{[n^2 \cos \theta + (n^2 - \sin^2 \theta)^{1/2}][\cos \theta + (n^2 - \sin^2 \theta)^{1/2}]},$$

$$A_2(\theta, p) = A_1(\theta, p) [q_1(\theta, p) + q_2(\theta, p)],$$

$$A_m(\theta, p) = A_1(\theta, p) \frac{q_2^m(\theta, p) - q_1^m(\theta, p)}{q_2(\theta, p) - q_1(\theta, p)}, \quad m > 2,$$

$$q_1(\theta, p) = \frac{n^2 \cos \theta - (n^2 - \sin^2 \theta)^{1/2}}{n^2 \cos \theta + (n^2 - \sin^2 \theta)^{1/2}},$$

$$q_2(\theta, p) = \frac{(n^2 - \sin^2 \theta)^{1/2} - \cos \theta}{(n^2 - \sin^2 \theta)^{1/2} + \cos \theta}.$$

Заметим, что в случае $n \gg 1$ коэффициент $A_1(\theta, p) \approx 2 \cos \theta / n \ll 1$, тогда как соответствующий коэффициент в выражении для $A_x^{(1)}(M, p)$ примерно равен единице ($q(\theta, p) \approx 1$). Следовательно, в этом случае можно не учитывать z -компоненту векторного потенциала.

Исследование нестационарного процесса распространения электромагнитных импульсов

Его проводят, выполняя обратное преобразование Лапласа асимптотических разложений полученных функций-изображений:

$$H_x^{(1)}(M, p) = -p\varepsilon_1(p)A_x^{(1)} + \frac{1}{\mu p} \frac{\partial^2}{\partial x^2} C^{(1)}, \quad (4.36)$$

$$C^{(1)}(M, p) = A_x^{(1)} + B_z^{(1)}.$$

Асимптотическое разложение первого порядка, согласно (4.32), (4.35), имеет вид:

$$C_1^{(1)}(M, p) = \frac{J_x(p)}{2\pi} \left\{ G(R, p) + \sum_{m=1}^{\infty} [G(R_m^-, p)(q^m(\theta_m^-) + A_m(\theta_m^-)) + G(R_m^+, p)(q^m(\theta_m^+) + A_m(\theta_m^+))] \right\}.$$

Применение обратного преобразования Лапласа для расчета функции времени $H_x^{(1)}(M, t)$ начнем с определений функций времени $A_x^{(1)}(M, t)$ и $C^{(1)}(M, t)$, полагая функцию $J_x(p)$ равной единице, что соответствует импульсу магнитного тока в виде δ -функции: $J_x(t) = \delta(t)$ или $m_x(t) = \eta(t)$, где $\eta(t)$ — единичная ступенчатая функция, равная нулю при $t < 0$ и единице при $t > 0$.

Обратное преобразование Лапласа функции-изображения $H_x^{(1)}(M, p)$ может быть затем представлено в виде свертки функции импульса $m(t)$ (либо ее производных) и полученных функций $A_x^{(1)}(M, t)$, $C^{(1)}(M, t)$ (либо их производных по времени).

Для простоты рассмотрим частный случай сред с одинаковым коэффициентом затухания:

$$\chi_1 = \chi_2 = \chi, \quad \chi_j = \eta_0 \sigma_j / (2\varepsilon_{rj}). \quad (4.37)$$

В таких средах параметр $n = k_2/k_1$ будет действительным и не будет зависеть от параметра преобразования Лапласа p : $n = (\varepsilon_{r2}/\varepsilon_{r1})^{1/2}$. В результате коэффициенты q_m и A_m также не будут зависеть от p . Для таких сред можно сразу выписать обратное преобразование Лапласа выражения вида (4.32), со-

ответствующего приближению геометрической оптики, воспользовавшись результатами для однородной среды:

$$\frac{1}{R} F_0(M, t) = L^{-1} G(R, p) = [\eta(t - t_R) B_0(t_R, t) + \\ + \delta(t - t_R) \exp(-\chi t_R)] / R,$$

где символ L^{-1} означает операцию обратного преобразования Лапласа; $t_R = R \sqrt{\epsilon_{r1}}$ — соответствует времени прохождения волной расстояния R в среде 1 (напомним, что время рассматривается в нормированных единицах, совпадающих по размерности с длиной оптического пути);

$$B_0(t_R, t) = \chi t_R \cdot e^{-\chi t} I_1(\chi \sqrt{t^2 - t_R^2}) / \sqrt{t^2 - t_R^2}.$$

В результате в приближении геометрической оптики получим

$$A_{x1}^{(1)}(M, t) = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{1}{R} F_0(M, t)|_{R^+} + \sum_{m=1}^{\infty} \left(q^m|_{\theta_m^-} \frac{1}{R^-} F_0(M, t)|_{R_m^-} + \right. \right. \\ \left. \left. + q^m|_{\theta_m^+} \frac{1}{R^+} F_0(M, t)|_{R_m^+} \right) \right], \quad (4.38)$$

$$B_{z1}^{(1)}(M, t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \left[A_m|_{\theta_m^-} \frac{1}{R^-} F_0(M, t)|_{R_m^-} + \right. \\ \left. + A_m|_{\theta_m^+} \frac{1}{R^+} F_0(M, t)|_{R_m^+} \right], \quad (4.39)$$

где

$$F_0(M, t)|_{R_m^\pm} = [\eta(t - t_R) B_0(t_R, t) + \delta(t - t_R) \exp(-\chi t_R)]|_{t_R} = \\ = R_m^\pm \sqrt{\epsilon_{r1}}.$$

В случае $q = \pm 1$ выражение (4.38) можно получить строго (см. работу [4]).

Формулы (4.38), (4.39) с индексами m имеют простой физический смысл, состоящий в том, что каждое из этих слагаемых дает аналитическое выражение для электромагнитных волн, испытавших m отражений от границы раздела двух сред и прошедших путь $R_m^\pm$ в среде 1. Каждое такое слагаемое «включается» только в момент времени $t > R_m^\pm \sqrt{\epsilon_{r1}}$. Коэффициент $q(\theta_m^\pm)$ соответствует коэффициенту отражения от границы раздела двух сред в волне, отвечающей $A_x^{(1)}$. При $q(\theta_m^\pm) > 0$ отражение

происходит с сохранением фазы волны, а при $q(\theta_m^\pm) < 0$ — с изменением фазы волны на π при каждом отражении (последний случай имеет место при $n^2 \ll 1$).

6. Боковая волна.

Ограничимся исследованием случая, когда выполнено условие (4.37). В ситуации, когда $n < 1$, $\theta_m > \delta = \arcsin n$, в интеграле (4.28) при деформации контура Γ в перевальный контур затрагивается точка ветвления $\theta_b = \delta$ [15], поэтому при оценке интеграла (4.28), соответствующего x -компоненте векторного потенциала (либо при оценке интеграла (4.34), отвечающего z -компоненте, наряду с членами вида (4.29), либо (4.35)), возникают дополнительные слагаемые, имеющие физический смысл боковых волн и представляющие собой интегралы по берегам разреза:

$$F_m^{\pm(\text{lat})}(M, p) = \int_{i\infty}^{\delta} F_L(\theta) e^{\rho f(\theta)} d\theta + \int_{\delta}^{i\infty} F_R(\theta) e^{\rho f(\theta)} d\theta,$$

где $F_{L,R}(\theta) = e^{i\pi/4} \sqrt{k_1 \sin \theta / (2\pi r)} V_{L,R}(\theta)$;

$f(\theta) = ik_1(p) \cos(\theta - \theta_s)$; $\rho = R_m^\pm$; $\theta_s = \theta_m^\pm$;

индексами L и R помечены левый и правый берега разреза, причем знаки корня $S = (n^2 - \sin^2 \theta)^{1/2}$ на берегах разреза противоположны:

$$V_L = V_{|S}, \quad V_R = V_{|-S}.$$

Под $F_m^{\pm(\text{lat})}(M, p)$ понимаем либо $G_m^{\pm(\text{lat})}(M, p)$, либо $B_m^{\pm(\text{lat})}(M, p)$ — в зависимости от того, какую компоненту векторного потенциала мы рассматриваем. Соответственно функция $V(\theta)$ равна либо $q^m(\theta, p)$, либо $A_m(\theta, p)$.

Обозначим $\Phi_m(\theta) = V_R(\theta) - V_L(\theta)$. Имеем

$$F_m^{\pm(\text{lat})}(M, p) = e^{i\pi/4} \left(\frac{k_1}{2\pi r} \right)^{1/2} \int_{\delta}^{i\infty} \Phi_m(\theta) \exp[ik_1 \rho \cos(\theta - \theta_s)] \sqrt{\sin \theta} d\theta.$$

Функцию $\Phi_m(\theta)$ для удобства дальнейших преобразований представим в виде

$$\Phi_m(\theta) = \hat{\Phi}_m(\theta) \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta}.$$

Линия интегрирования при вычислении интеграла по разрезу определяется (согласно методу наискорейшего спуска) соотношениями:

$$\operatorname{Re} \cos(\theta - \theta_s) = \cos(\theta_s - \delta), \quad \operatorname{Im} \cos(\theta - \theta_s) > 0,$$

Воспользовавшись соотношением

$$\cos(\theta - \theta_s) = \cos(\theta' - \theta_s) \operatorname{ch} \theta'' - i \sin(\theta' - \theta_s) \operatorname{sh} \theta'',$$

получим уравнение для определения зависимости $\theta' = \theta'(\theta'')$ вдоль линии интегрирования:

$$\cos(\theta' - \theta_s) \operatorname{ch} \theta'' = \cos(\theta_s - \delta) = \text{const},$$

$$0 < \theta'' < \infty, \quad \theta'(0) = \delta, \quad \theta'(\infty) = \frac{\pi}{2} + \theta_m.$$

Значение рассматриваемого интеграла в первом приближении определяется поведением подынтегрального выражения при малых θ'' . При $\theta'' \approx 0$ имеем

$$\begin{aligned} \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta} &= \sqrt{n^2 - (\sin \theta' \operatorname{ch} \theta'' + i \cos \theta' \operatorname{sh} \theta'')^2} \approx \\ &\approx \sqrt{n^2 - (n + i \cos \delta \theta'')^2} \approx -e^{-i\pi/4} \sqrt{2n \cos \delta \theta''}, \end{aligned}$$

так как $\operatorname{Im} \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta} > 0$,

$$\cos(\theta - \theta_s) \sim \cos(\theta_s - \delta) - i \sin(\theta_s - \delta) \theta''.$$

В результате

$$\begin{aligned} F_m^{\pm(\text{lat})}(M, p) &\cong -i \left(\frac{k_1}{2\pi r} \right)^{\frac{1}{2}} n \sqrt{2 \cos \delta} \exp[ik_1 \rho \cos(\theta_s - \delta)] \hat{\Phi}_m(\delta) \times \\ &\times \int_0^\infty \exp[-k_1 \rho \sin(\theta_s - \delta) \theta''] (\theta'')^{1/2} d\theta''. \end{aligned}$$

Получаем, что исследуемый интеграл в случае, когда разность $\theta_s - \delta$ не слишком мала, в первом приближении определяется значением интеграла вида

$$\int_0^\infty \exp(-b\theta'') \sqrt{\theta''} d\theta'' = \frac{1}{2} \sqrt{\pi/b^3},$$

откуда

$$F_m^{\pm(\text{lat})}(M, p) \cong F_{m1}^{\pm(\text{lat})}(M, p) = \frac{2 \exp[ik_1 \rho \cos(\theta_s - \delta)] \hat{\Phi}_m(\delta)}{ik_1 n \sqrt{r \cos \delta} [\rho \sin(\theta_s - \delta)]^{3/2}}.$$

Нетрудно показать, что

$$\hat{\Phi}_m(\delta) = \lim_{S \rightarrow 0} \frac{1}{S} [V_{|-S} - V_{|S}] = \frac{\partial}{\partial S} V_{|S=0}, \quad S = \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta}.$$

Для x -компоненты векторного потенциала

$$\hat{\Phi}_{xm}(\delta) = \frac{4m}{n^2 \cos \delta},$$

тогда как в случае z -компоненты

$$\begin{aligned} \hat{\Phi}_{zm}(\delta) = & \frac{4 \cos \delta}{n^4} \left[(-1)^m 2 \left[\frac{m+1}{2} \right] \cos^2 \delta + \right. \\ & \left. + (2m + \cos^2 \delta) \begin{cases} 1, & m = 2k \\ 0, & m = 2k + 1 \end{cases} \right], \end{aligned}$$

где $\left[\frac{m+1}{2} \right]$ означает целую часть числа.

Например, $\hat{\Phi}_{z1}(\delta) = 4 \cos \delta (n^2 + 1) n^{-4}$, $\hat{\Phi}_{z2}(\delta) = 8 \cos^3 \delta n^{-4}$.

В любом случае боковая волна индекса m в первом приближении имеет вид

$$F_{m1}^{\pm(\text{lat})}(M, p) = E \frac{\exp(ik_1 v)}{ik_1}, \quad (4.40)$$

$$E = E(r, \rho, \theta_s, \delta) = \frac{\hat{\Phi}_m(\delta)}{n \sqrt{r \cos \delta} [\rho \sin(\theta_s - \delta)]^{3/2}},$$

$$v = \rho \cos(\theta_s - \delta) = R_m^{\pm} \cos(\theta_m^{\pm} - \delta), \quad \theta_s = \theta_m^{\pm}.$$

Аналогичный вид, с точки зрения зависимости от параметра преобразования Лапласа p (напомним, что рассматривается случай, когда n не зависит от p), имеют поправки второго приближения в (4.30):

$$G_m^{\pm(\text{add})}(M, p) = \hat{E} \frac{\exp(ik_1 \hat{v})}{ik_1}, \quad (4.41)$$

$$\hat{E} = \hat{E}(\rho, \theta_s, \delta) = \frac{1}{2} \rho^{-2} (V' \operatorname{ctg} \theta + V'')|_{\theta=\theta_s},$$

$$\hat{v} = \rho = R_m^\pm, \theta_s = \theta_m^\pm.$$

7. Обратное преобразование Лапласа поправок негеометрической оптики (приближения второго порядка и решений типа боковой волны).

Из (4.40), (4.41) следует, что, аналогично случаю однородного пространства, общее решение, зависящее от переменной времени t , может быть получено как суперпозиция функций $F_n^{(a)}(v, t)$, являющихся обратными преобразованиями Лапласа функций $G_n^{(a)}(v, p)$ следующего вида:

$$F_n^{(a)}(v, t) = L^{-1} G_n^{(a)}(v, p) = L^{-1} \exp(ik_1 v) p^n / (ik_1), \quad n = -1, 0, 1, 2.$$

Найдем обратное преобразование Лапласа функции $G_0^{(a)}(v, p)$, используя соотношение

$$G_0^{(a)}(v, p) = - \int_v^\infty \exp(ik_1 \lambda) d\lambda,$$

следующее из того, что

$\frac{\partial}{\partial v} G_0^{(a)}(v, p) = \exp(ik_1 v)$, $G_0^{(a)}(v, p) \rightarrow 0$ при $v \rightarrow \infty$. Отсюда несложно получить обратное преобразование Лапласа для рассматриваемой функции, используя результаты для однородной среды:

$$F_0^{(a)}(v, t) = - \frac{1}{\sqrt{\epsilon_{r1}}} \int_{\tilde{v}}^\infty [\eta(t - \tilde{v}') B_0(\tilde{v}', t) + \delta(t - \tilde{v}') e^{-i\tilde{v}'}] d\tilde{v}',$$

$$B_0(\tilde{v}, t) = \chi \tilde{v} \cdot e^{-i\tilde{v}} I_1(\chi \sqrt{t^2 - \tilde{v}^2}) / \sqrt{t^2 - \tilde{v}^2}, \quad \tilde{v} = v \sqrt{\epsilon_{r1}}.$$

После преобразований и замены переменных $q^2 = t^2 - \tilde{v}^2$ получим

$$F_0^{(a)}(v, t) = - \frac{1}{\sqrt{\epsilon_{r1}}} \eta(t - \tilde{v}) e^{-i\tilde{v}} \left[1 + \chi \int_0^{\sqrt{t^2 - \tilde{v}^2}} I_1(\chi q) dq \right] = \\ = \eta(t - \tilde{v}) B_0^{(a)}(\tilde{v}, t),$$

$$B_0^{(a)}(\tilde{v}, t) = -(\epsilon_{r1})^{-1/2} e^{-i\tilde{v}} I_0(\chi \sqrt{t^2 - \tilde{v}^2}),$$

так как $\chi I_1(\chi q) = dI_0(\chi q)/dq$.

Отсюда следует, в частности, что исследуемые члены появляются (становятся отличными от нуля) в момент времени $t = \tilde{v}$. Для слагаемых, соответствующих приближению второго порядка, эта величина будет равна $\tilde{v} = \sqrt{\epsilon_{r1}} R_m^\pm$ и ее смысл будет тем же, что и у соответствующих членов приближения геометрической оптики, рассмотренного выше. Поясним смысл величины $\tilde{v}$, отвечающей боковой волне с индексом m :

$$\begin{aligned} \tilde{v} = \sqrt{\epsilon_{r1}} R_m^\pm \cos(\theta_m^\pm - \delta) = R_m^\pm [\sqrt{\epsilon_{r1}} \cos(\theta_m^\pm) \cos \delta + \\ + \sqrt{\epsilon_{r2}} \sin(\theta_m^\pm)] = (2md \pm z) \sqrt{\epsilon_{r1} - \epsilon_{r2}} + r \sqrt{\epsilon_{r2}}, \end{aligned} \quad (4.42)$$

так как

$$\sin \theta_m^\pm = r / R_m^\pm, \quad \cos \theta_m^\pm = (2md \pm z) / R_m^\pm,$$

$$\sin \delta = \sqrt{\epsilon_{r2} / \epsilon_{r1}}, \quad \cos \delta = \sqrt{1 - \epsilon_{r2} / \epsilon_{r1}}.$$

Формула (4.42) отражает важное физическое свойство боковых волн (С. Б. Попов [4]): величина $\tilde{v}_{|m=1}$ при $m=1$ равна оптическому пути от источника (точка с координатой $r=0$, $z=0$) в точку наблюдения (точка с координатой $M=M(r, z)$) в форме равнобочной трапеции (при $z>0$ «незавершенной» в случае R_1^- (рис. 4.13, а) или с дополнительным участком пути для R_1^+ (рис. 4.13, б)) с нижним основанием длины r , соответствующим пути прямого сигнала, и с верхним основанием, лежащим на границе раздела двух сред.

При $m>1$ величина $\tilde{v}_{|m}$ соответствует оптическому пути, имеющему форму m стоящих рядом равнобочных трапеций (на рис. 4.14, отвечающем случаю $m=2$, для простоты изображен случай $z=0$, — тогда $R_m^- = R_m^+$). Очевидно, боковая волна с индексом m испытывает $m-1$ промежуточное отражение от идеально проводящей плоскости, вдоль которой проходит ось координат y . С ростом числа m значение угла

$$\theta_m^\pm = \arctg\left(\frac{r}{2mh \pm z}\right)$$

приближается к нулю, и наступает момент,

когда нарушается условие существования боковой волны: $\theta_m^\pm > \delta$. Поэтому, боковые волны с индексом m существуют (если выполнены условия их существования) лишь для малых номеров m .

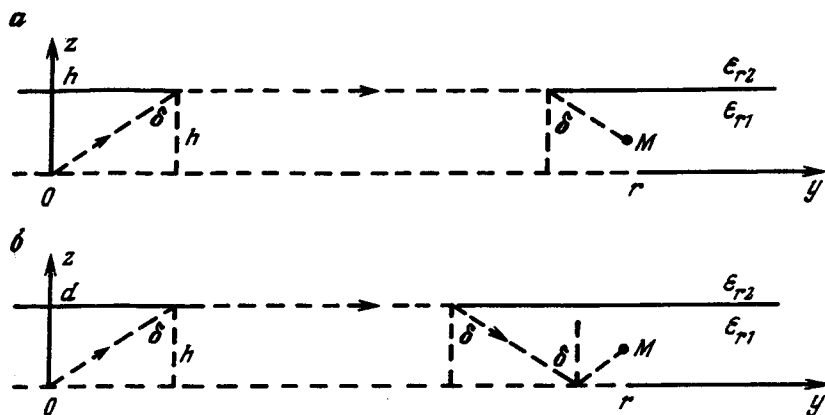


Рис. 4.13. Траектория распространения боковой волны вблизи границы раздела двух сред, $m=1$

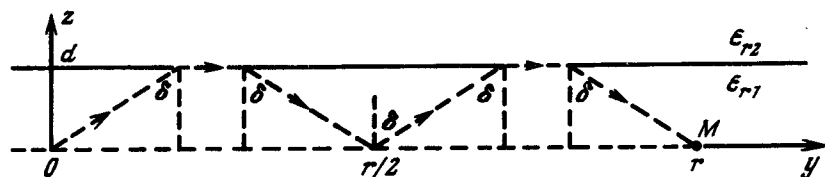


Рис. 4.14. Траектория распространения боковой волны вблизи границы раздела двух сред, $m=2$

Напомним, что полученные выражения для боковой волны с индексом m перестают работать при $\theta_m^{\pm} \sim \delta$.

С помощью найденной функции $F_0^{(a)}(v, t)$ нетрудно определить функции $F_k^{(a)}(v, t)$, $k = -1, 0, 1, 2$:

$$F_{-1}^{(a)}(v, t) = \eta(t - \tilde{v}) B_{-1}^{(a)}(\tilde{v}, t), \quad F_0^{(a)}(v, t) = \eta(t - \tilde{v}) = B_0^{(a)}(\tilde{v}, t),$$

$$F_1^{(a)}(v, t) = \eta(t - \tilde{v}) B_1^{(a)}(\tilde{v}, t) + \delta(t - \tilde{v}) B_0^{(a)}(\tilde{v}, \tilde{v}),$$

$$F_2^{(a)}(v, t) = \eta(t - \tilde{v}) B_2^{(a)}(\tilde{v}, t) + \delta(t - \tilde{v}) B_1^{(a)}(\tilde{v}, \tilde{v}) + \\ + \delta'(t - \tilde{v}) B_0^{(a)}(\tilde{v}, \tilde{v}),$$

$$B_{k+1}^{(a)}(\tilde{v}, t) = \frac{\partial}{\partial t} B_k^{(a)}(\tilde{v}, t), \quad k = -1, 0, 1,$$

$$B_{-1}^{(a)}(\tilde{v}, t) = \int_{\tilde{v}}^t B_0^{(a)}(\tilde{v}, t') dt'.$$

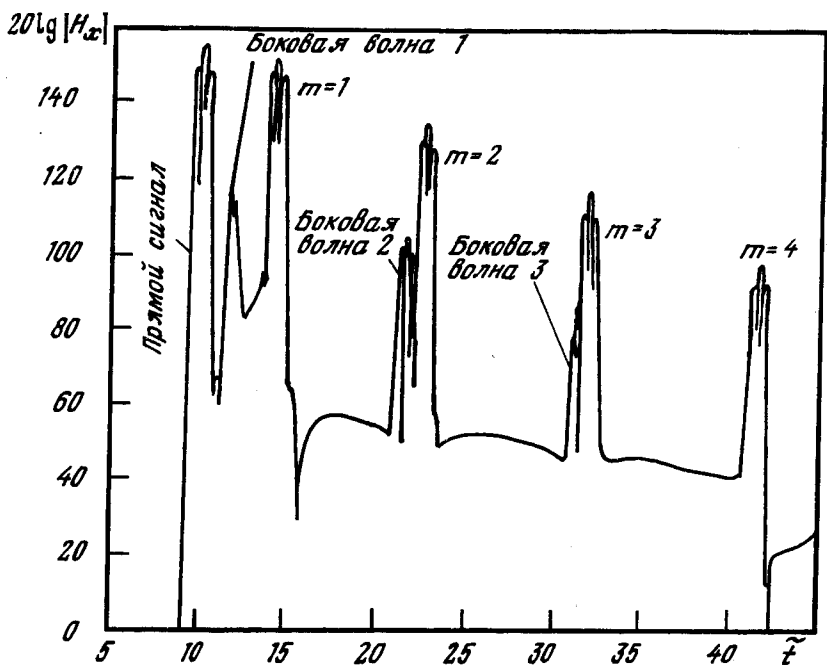


Рис. 4.15. Отклик поля H_x на возбуждение гауссовым импульсом горизонтального магнитного диполя в двухслойной среде с толщиной первого слоя $d=0,55$ м ($\epsilon_{r1}=80$, $\sigma_1=0,1$ См/м; $\epsilon_{r2}=1$, $\sigma_2=0,005$ См/м) в точке $M(0, y_m, 0)$ при $y_m=1$ м (m — кратность отраженного импульса); время $t = ct_{\text{св}}$

Функции $F_k^{(a)}(\tilde{v}, t)$, $k=1, 2$, рассматриваются в классе обобщенных функций [9], тогда как входящие в их определение функции $B_k^{(a)}(\tilde{v}, t)$ принадлежат к обычным классическим функциям, причем при $t \rightarrow \tilde{v} + 0$ они принимают конечные значения:

$$B_{-1}^{(a)}(\tilde{v}, \tilde{v}) = 0, B_0^{(a)}(\tilde{v}, \tilde{v}) = -(\epsilon_{r1})^{-1/2} \exp(-\chi \tilde{v}),$$

$$B_1^{(a)}(\tilde{v}, \tilde{v}) = \chi \exp(-\chi \tilde{v}) (\chi \tilde{v} / 2 - 1).$$

Заметим, что все функции $B_k^{(a)}(\tilde{v}, t)$ определены при $t \geq \tilde{v}$.

Полученные асимптотические разложения второго порядка применяются для построения эффективных аналитических решений распространения электромагнитного импульса произвольной формы в двухслойно-неоднородных средах.

На рис. 4.15 представлен отклик поля H_x на возбуждение гауссовым импульсом магнитного диполя с параметрами

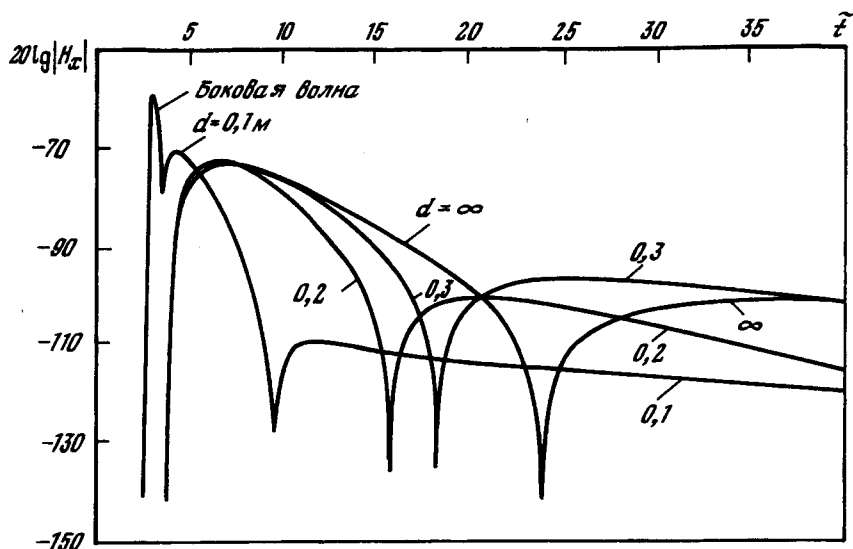


Рис. 4.16. Эффект инверсии во времени отклика поля H_x на возбуждение гауссовым импульсом горизонтального магнитного диполя в двухслойной среде с большой проводимостью первого слоя ($\sigma_1 = 1$ См/м, $\epsilon_{r1} = 40$; $\epsilon_{r2} = 4$, $\sigma_2 = 0,01$ См/м) в точке $M(0, y_m, 0)$ при $y_m = 0,5$ м для значений толщины слоя $d = 0,1; 0,2; 0,3$ м и ∞ ; время $t = c t_{\text{sec}}$

$\beta = 5$, $\tau_0 = 1$, $m_0 = 1$ в двухслойной среде с $\epsilon_{r1} = 80$, $\sigma_1 = 0,1$ См/м, толщина первого слоя $d = 0,55$ м, параметры второго полубесконечного слоя $\epsilon_{r2} = 1$, $\sigma_2 = 0,005$ См/м. Точка приема сигнала $M(0, y_m, 0)$ была фиксирована при $y_m = 1,0$ м. Время прихода фронта прямого сигнала вычисляется по формуле $t_{\text{sec}} = R/v = R\sqrt{\epsilon_r}/c$. Прямой импульс проходит по среде 1 и имеет максимальную амплитуду в момент времени $\tilde{t} \approx 10$ в точке наблюдения M . Импульс, однократно отраженный от границы раздела двух сред, достигает точки M в момент времени $\tilde{t} \approx 15$. Импульс, двукратно отраженный от границы раздела двух сред, согласно формуле 4.42, достигает точки M в момент времени $\tilde{t} \approx 15$, боковая волна — в момент $\tilde{t} \approx 12$. Отсюда следует, что наличие ряда максимумов в отклике двухслойной среды является явным признаком ее слоистости. Кроме того, анализ фазовой скорости и амплитуды импульсов позволяет оценить электрические параметры и толщину слоев.

На рис. 4.16 показаны эффекты инверсии магнитного поля во времени для электромагнитного импульса, проходящего

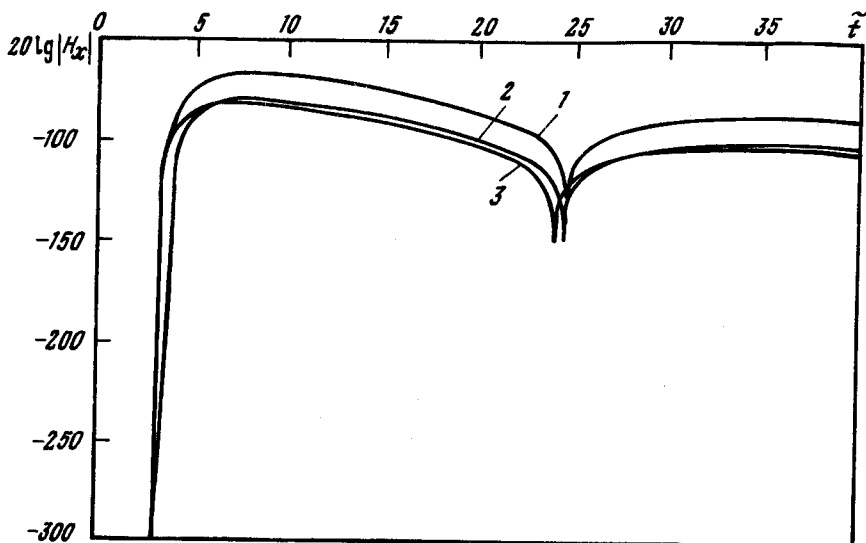


Рис. 4.17. Аналитическое решение в двухмерной теории дифракции отклика компоненты H_x (параллельной нити магнитного тока) для однородного полубесконечного слоя на возбуждение диполя Гауссовым импульсом ($1-\beta=1$, $\tilde{\tau}_0=1$; $2-\beta=5$, $\tilde{\tau}_0=1$) и прямоугольным импульсом ($3-\tilde{\tau}_0=1$). Параметры среды: $\epsilon_{r1}=36$, $\sigma_1=1$ См/м, точка наблюдения поля $M(0, x_m, 0)$ при $y_m=0,5$ м, время $\tilde{t}=c t_{\text{свс}}$

в двухслойной среде при большой проводимости $\sigma_1=1$ См/м, и толщины первого слоя $\epsilon_{r1}=40$. Кривые приведены для различных толщин первого слоя: $d=0,1$; $0,2$; $0,3$ и $d=\infty$. Магнитный диполь возбуждается гауссовым импульсом с параметрами $\beta=5$, $\tau_0=1$, $m_0=1/c$. Электрические параметры второго полубесконечного слоя: $\epsilon_{r2}=4$, $\sigma_2=0,01$ См/м. Точка приема сигнала $M(0, y_m, 0)$ была фиксирована при $y_m=0,5$ м. Отсюда следует, что анализ времени прихода переднего фронта волны, значения максимальной амплитуды сигнала и момент времени инверсии $\tilde{t}_{\text{inv}}$ в точке M позволяют оценить толщину и электрические параметры первого и второго слоев. Правая ветвь отклика поля H_x , резко нарастая в момент времени $\tilde{t}_{\text{inv}}$, описывает диффузию электромагнитного импульса в среде с большими потерями.

На рис. 4.17 показаны отклики однородного полубесконечного слоя на возбуждение щели гауссовым импульсом с $m_0=1/c$ (кривая 1 с $\beta=1$, $\tilde{\tau}_0=1$, кривая 2 с $\beta=5$, $\tilde{\tau}_0=1$) и прямо-

угольным импульсом (кривая 3) с длительностью импульса $\tau_0 = 1$. Параметры среды $\epsilon_{r,1} = 36$, $\sigma_1 = 1$ См/м, точка наблюдения поля $M(0, y_m, 0)$ при $y_m = 0,5$ м. Приведенные здесь кривые получены на основе аналитического решения для модели двухмерной (2D) теории дифракции. Эффекты диффузии и инверсии во времени магнитного поля импульса в среде с большими потерями (см. рис. 4.16), исследование которых выполнено на основе численного решения задач трехмерной теории дифракции, имеют такое же полное описание и в рамках 2D теории дифракции.

В заключение отметим, что структурный анализ волнового поля (и, в частности, боковых волн) играет исключительно важную роль, когда зонд СКИ работает в нефтяных и газовых скважинах, разбуриваемых с применением промывочных жидкостей на водной основе. В этом случае первый слой толщиной $d \approx 0,05$ м у поверхности зонда имеет электрические параметры $\epsilon_{r,1} \approx 80$ и $\sigma_1 \approx 1$ См/м, тогда как соответствующие электрические параметры незатронутой части пласта примерно в 10 раз ниже, что способствует первому вступлению в точку приема сигнала $y_m \approx 0,5 \div 1$ м целой группы боковых волн. Эти «быстрые» волны имеют самую большую амплитуду; другой волной, поступающей значительно позднее и имеющей примерно такую же амплитуду, будет волна, отразившаяся от границы пласта (водонефтяного или газовойдяного контактов). Поскольку назначением зонда СКИ является определение этих границ (а также электрических параметров незатронутой части пласта), то в аппаратном блоке обработки сигнала зонда СКИ проводится специальный анализ структуры боковых волн.

4.6. СТАЦИОНАРНЫЕ РЕЖИМЫ РАБОТЫ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ЗОНДОВ С АЗИМУТАЛЬНО НЕОДНОРОДНЫМ ВОЗБУЖДЕНИЕМ

Особое значение для каротажа горизонтальных скважин приобретают методы, обеспечивающие исследование околоскважинных пространств в произвольном направлении в плоскости, перпендикулярной к оси скважины, — зонды с азимутально направленной диаграммой излучения. Такой характеристикой

направленности обладают цилиндрические зонды из металла, вблизи наружной поверхности которых располагаются электрические или магнитные диполи, возбуждающие электромагнитные поля с частотой ~ 1 ГГц.

В данном разделе проводится исследование зондов с апертурным (щелевым) возбуждением, обеспечивающих азимутальный обзор неоднородных околоскважинных зон. Эти зонды применяются для изучения зоны проникновения фильтрата бурового раствора, наличия трещин и их ориентации, коэффициента анизотропии электрофизических параметров околоскважинных пространств.

Математическая модель представляет собой круговой, идеально проводящий бесконечно длинный цилиндр радиуса a , на поверхности которого прорезана узкая и короткая поперечная излучающая щель, являющаяся, согласно принципу эквивалентности, магнитным диполем.

ФОРМУЛИРОВКА ПРОБЛЕМЫ

Вводится полярная система координат (r, φ, z) с осью z , проходящей вдоль оси цилиндра. Координаты диполя $(a, 0, 0)$, магнитный момент тока равен $J = I_{\varphi}^M L$, приемные щели находятся как в точках с координатами $(a, 0, z_M)$ вдоль образующей зонда, так и в точках $(a, \varphi_M, 0)$ поперечного сечения зонда плоскостью $z = 0$.

Предполагается, что источник электромагнитного поля меняется во времени как $\exp(-i\omega t)$. Электромагнитное поле в рассматриваемой области удовлетворяет уравнениям Максвелла:

$$\operatorname{rot} \vec{E}(P) = i\omega\mu \vec{H}(P) - \vec{J}^M, \quad (4.43)$$

$$\operatorname{rot} \vec{H}(P) = -i\omega\varepsilon \vec{E}, \quad (4.44)$$

$$\vec{J}^M = (0, J_{\varphi}^M, 0),$$

$$J_{\varphi}^M(r', \varphi', z') = J\delta(\varphi')\delta(z')\delta(r' - b)/r',$$

где $\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r + i\sigma/\omega$; ε_0 — диэлектрическая проницаемость вакуума; $\omega = 2\pi f$; f — частота поля; σ — проводимость среды, См/м; $\mu = \mu_0$ — магнитная проницаемость вакуума; b — радиальная координата диполя ($b = a$); L — длина щели; $J = I_{\varphi}^M L = \text{const.}$

Вводя векторный потенциал $\vec{A}(P)$, решение уравнений (4.43), (4.44) представляем в виде:

$$\vec{E}(P) = -\text{rot } \vec{A}(P), \quad (4.45)$$

$$\vec{H}(P) = i\omega \varepsilon \vec{A}(P) + \frac{i}{\omega\mu} \text{grad div } \vec{A}(P), \quad (4.46)$$

$$\vec{A}(P) = \iiint \vec{J}^M(Q) G(P, Q) dv_Q, \quad P = (r, \varphi, z), \quad Q = (r', \varphi', z'),$$

где $G(P, Q)$ — функция Грина в цилиндрической системе координат [10]:

$$G(p, q) = \frac{1}{8\pi} \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \exp[in(\varphi - \varphi')] \int_{k=-\infty}^{\infty} \exp[-\gamma|z - z'|] \times \\ \times \psi(r, r', \kappa) \frac{\kappa d\kappa}{\gamma},$$

$$\psi(r, r', \kappa) = \begin{cases} H_n^{(1)}(\kappa r') J_n(\kappa r), & r < r', \\ H_n^{(1)}(\kappa r) J_n(\kappa r'), & r > r', \end{cases}$$

$$\gamma = (\kappa^2 - k^2)^{1/2}, \quad \text{Re } \gamma > 0, \quad k = \omega(\mu\varepsilon)^{1/2}, \quad \text{Im } k > 0.$$

Отсюда имеем:

$$A_r(P) = \int [J_r^M \cos(\varphi - \varphi') + J_\varphi^M \sin(\varphi - \varphi')] G(P, Q) dV_Q = \\ = J \sin(\varphi) G(P, Q)|_{Q=(b, 0, 0)},$$

$$A_\varphi(P) = \int [J_\varphi^M \cos(\varphi - \varphi') - J_r^M \sin(\varphi - \varphi')] G(P, Q) dV_Q = \\ = J \cos(\varphi) G(P, Q)|_{Q=(b, 0, 0)},$$

$$A_z(P) = \int J_z^M G(P, Q) dV_Q = 0.$$

Выражения для z -компоненты электрического и магнитного поля запишем следующим образом:

$$E_z(P) = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r A_\varphi \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} = \\ = J \left\{ -\cos(\varphi) \frac{\partial G(P, Q)}{\partial r_P} + \frac{1}{r} \sin(\varphi) \frac{\partial G(P, Q)}{\partial \varphi_P} \right\} |_{Q=(b, 0, 0)} =$$

$$= \frac{J}{8\pi} \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \left\{ \exp(in\varphi) \int_{\kappa=-\infty}^{\infty} \exp[-\gamma|z|] \times \right. \\ \left. \times \left[-\cos\varphi \frac{\partial}{\partial r} \psi(r, b, \kappa) + \sin\varphi \frac{in}{r} \psi(r, b, \kappa) \right] \frac{\kappa d\kappa}{\gamma} \right\}.$$

Преобразуем слагаемые под знаком суммы (при $r < b$):

$$\begin{aligned} \Sigma e^{in\varphi} H_n^{(1)}(\kappa b) \left[-\kappa \cos\varphi J_n'(\kappa r) + \frac{in}{r} \sin\varphi J_n(\kappa r) \right] = \\ = \frac{\kappa}{2} \Sigma H_n^{(1)}(\kappa b) [e^{(n+1)i\varphi} J_{n+1}(\kappa r) - e^{(n-1)i\varphi} J_{n-1}(\kappa r)] = \\ = \frac{\kappa}{2} \Sigma e^{in\varphi} J_n(\kappa r) [H_{n-1}^{(1)}(\kappa b) - H_{n+1}^{(1)}(\kappa b)] = \\ = \kappa \Sigma e^{in\varphi} J_n(\kappa r) H_n^{(1)'}(\kappa b), \end{aligned}$$

$$\text{где } H_n^{(1)'}(\zeta) = \frac{d}{d\zeta} H_n^{(1)}(\zeta), \quad J_n'(\zeta) = \frac{d}{d\zeta} J_n(\zeta).$$

При преобразовании были использованы соотношения:

$$\frac{2n}{\zeta} R_n(\zeta) = R_{n-1}(\zeta) + R_{n+1}(\zeta), \quad 2 R_n'(\zeta) = R_{n-1}(\zeta) - R_{n+1}(\zeta),$$

$$\sin\varphi = (e^{i\varphi} - e^{-i\varphi})/(2i), \quad \cos\varphi = (e^{i\varphi} + e^{-i\varphi})/2,$$

$$\Sigma (B_{n+1} H_n - B_{n-1} H_n) = \Sigma B_n (H_{n-1} - H_{n+1}),$$

где под R_n понимается любая из функций Бесселя или Ханкеля. Случай $r > b$ рассматривается аналогично. В результате имеем:

$$\begin{aligned} E_z(P) = \frac{J}{8\pi} \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \exp(in\varphi) \int_{\kappa=-\infty}^{\infty} \exp[-\gamma|z|] \psi'(r, b, \kappa) \frac{\kappa^2 d\kappa}{\gamma}, \\ \psi'(r, b, \kappa) = \begin{cases} H_n^{(1)'}(\kappa b) J_n(\kappa r), & r < b, \\ H_n^{(1)}(\kappa r) J_n'(\kappa b), & r > b. \end{cases} \end{aligned}$$

Представим z -компоненту электрического поля в следующем виде [10]:

$$\begin{aligned}
 E_z &= \int_{\kappa=-\infty}^{\infty} E_{z\kappa} d\kappa, \quad E_{z\kappa} = \frac{J}{8\pi} \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} E_{zn\kappa}, \\
 E_{zn\kappa} &= \exp(in\varphi - \gamma |z|) \psi'(r, b, \kappa) \kappa^2 / \gamma, \\
 H_z &= \frac{i}{\omega\mu} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial A_r}{\partial z} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 A_\varphi}{\partial \varphi \partial z} \right] = \\
 &= \frac{iJ}{\omega\mu r} \left\{ \sin \varphi \frac{\partial}{\partial r_P} \left(r \frac{\partial G(P, Q)}{\partial z_P} \right) + \frac{\partial^2}{\partial \varphi_P \partial z_P} \left[\cos \varphi G(P, Q) \right] \right\} \Big|_{Q=(b, 0, 0)} = \\
 &= \frac{iJ}{\omega\mu} \left\{ \sin \varphi \frac{\partial^2 G(P, Q)}{\partial r \partial z} + \frac{1}{r} \cos \varphi \frac{\partial^2 G(P, Q)}{\partial \varphi \partial z} \right\} \Big|_{Q=(b, 0, 0)} = \\
 &= \frac{-1}{8\pi} \frac{iJ}{\omega\mu} \operatorname{sgn}(z) \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \left\{ \exp(in\varphi) \int_{\kappa=-\infty}^{\infty} \exp[-\gamma |z|] \times \right. \\
 &\times \left. \left[\sin \varphi \frac{\partial}{\partial r} \psi(r, b, \kappa) + \cos \varphi \frac{in}{r} \psi(r, b, \kappa) \right] \kappa d\kappa \right\}.
 \end{aligned}$$

Слагаемые под знаком суммы (при $r < b$) преобразуем к виду:

$$\begin{aligned}
 \sum e^{in\varphi} H_n^{(1)}(\kappa b) \left[\kappa \sin \varphi J_n'(\kappa r) + \frac{in}{r} \cos \varphi J_n(\kappa r) \right] &= \\
 = i \frac{\kappa}{2} \sum H_n^{(1)}(\kappa b) \left[e^{(n+1)i\varphi} J_{n+1}(\kappa r) + e^{(n-1)i\varphi} J_{n-1}(\kappa r) \right] &= \\
 = i \frac{\kappa}{2} \sum H_n^{(1)}(\kappa b) \left[e^{(n+1)i\varphi} J_{n+1}(\kappa r) + e^{(n-1)i\varphi} J_{n-1}(\kappa r) \right] &= \\
 = i \frac{\kappa}{2} \sum e^{in\varphi} J_n(\kappa r) \left[H_{n+1}^{(1)}(\kappa b) + H_{n-1}^{(1)}(\kappa b) \right] &= \\
 = \frac{i}{b} \sum e^{in\varphi} n J_n(\kappa r) H_n^{(1)}(\kappa b).
 \end{aligned}$$

Решение в области $r > b$ рассматривается аналогично. В результате получаем [10]:

$$H_z(P) = -\frac{iJ}{8\pi} \frac{\operatorname{sgn}(z)}{\omega\mu} \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \exp(in\varphi) \frac{in}{b} \int_{\kappa=-\infty}^{\infty} \exp[-\gamma|z|] \psi \times \\ \times (r, b, \kappa) \kappa d\kappa.$$

Представим z -компоненту магнитного поля в виде

$$H_z = \int_{\kappa=-\infty}^{\infty} H_{z\kappa} d\kappa, \quad H_{z\kappa} = -\frac{iJ}{8\pi} \frac{\operatorname{sgn}(z)}{\omega\mu} \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} H_{zn\kappa},$$

$$H_{zn\kappa} = \exp(in\varphi - \gamma|z|) \frac{in}{b} \psi(r, b, \kappa) \kappa.$$

Напомним, что рассматривается случай, когда источник находится на поверхности цилиндра, т. е. $b = a$. Будем искать электромагнитное поле, отраженное от поверхности цилиндра, в виде:

$$E_{zn\kappa}^{\text{ref}} = \exp(in\varphi - \gamma|z|) H_n^{(1)'}(\kappa a) H_n^{(1)}(\kappa r) A(\kappa) \kappa^2/\gamma,$$

$$H_{zn\kappa}^{\text{ref}} = \exp(in\varphi - \gamma|z|) \frac{in}{a} H_n^{(1)}(\kappa a) H_n^{(1)}(\kappa r) B(\kappa) \kappa.$$

Из краевых условий на поверхности цилиндра:

$$E_{zn\kappa}^{\text{sum}}|_{r=a} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial r} H_{zn\kappa}^{\text{sum}}|_{r=a} = 0,$$

$$\text{где } E_{zn\kappa}^{\text{sum}} = E_{zn\kappa} + E_{zn\kappa}^{\text{ref}}, \quad H_{zn\kappa}^{\text{sum}} = H_{zn\kappa} + H_{zn\kappa}^{\text{ref}},$$

следует

$$A(\kappa) = -J_n(\kappa a) / H_n^{(1)}(\kappa a), \quad B(\kappa) = -J_n'(\kappa a) / H_n^{(1)'}(\kappa a).$$

Следовательно (при $r > a$):

$$E_{zn\kappa}^{\text{sum}} = \exp(in\varphi - \gamma|z|) [\psi'(r, a, \kappa) + H_n^{(1)'}(\kappa a) H_n^{(1)}(\kappa r) A(\kappa)] \frac{\kappa^2}{\gamma} = \\ = \exp(in\varphi - \gamma|z|) H_n^{(1)}(\kappa r) [J_n'(\kappa a) -$$

$$-H_n^{(1)'}(\kappa a) J_n(\kappa a) / H_n^{(1)}(\kappa a) \Big] \frac{\kappa^2}{\gamma} =$$

$$= -\frac{2i\kappa}{\pi a \gamma} \exp(in\varphi - \gamma |z|) H_n^{(1)}(\kappa r) / H_n^{(1)}(\kappa a),$$

так как

$$J_n'(\kappa a) H_n^{(1)}(\kappa a) - H_n^{(1)'}(\kappa r) J_n(\kappa a) = -\frac{2i}{\pi \kappa a};$$

$$H_{zn\kappa}^{\text{sum}} = \exp(in\varphi - \gamma |z|) H_n^{(1)}(\kappa r) \times$$

$$\times [J_n(\kappa a) - H_n^{(1)}(\kappa a) J_n'(\kappa a) / H_n^{(1)'}(\kappa a)] \frac{in\kappa}{a} =$$

$$= -\frac{2n}{\pi a^2} \exp(in\varphi - \gamma |z|) H_n^{(1)}(\kappa r) / H_n^{(1)'}(\kappa a).$$

Далее нетрудно найти поперечные компоненты электрического и магнитного полей, используя следующие соотношения, связывающие продольные и поперечные компоненты поля [19]:

$$\vec{E}_s = (k^2 + \gamma^2)^{-1} \left(\text{grad}_s \frac{\partial E_z}{\partial z} + i\omega\mu \text{rot}_s \vec{H}_z \right),$$

$$\vec{H}_s = (k^2 + \gamma^2)^{-1} \left(\text{grad}_s \frac{\partial H_z}{\partial z} + i\omega\varepsilon \text{rot}_s \vec{E}_z \right).$$

Здесь все векторы разложены в сумму продольных компонент поля (параллельных вектору z' , вдоль которого распространяется волна, и обозначенных индексом z) и поперечных компонент (ортогональных вектору z' и помеченных индексом s).

В нашем случае имеем:

$$E_{\varphi\kappa}(P) = \kappa^{-2} \left(\text{grad}_\varphi \frac{\partial E_{z\kappa}}{\partial z} + i\omega\mu \text{rot}_\varphi (\hat{z} H_{z\kappa}) \right), \quad (4.47)$$

$$H_{\varphi\kappa}(P) = \kappa^{-2} \left(\text{grad}_\varphi \frac{\partial H_{z\kappa}}{\partial z} - i\omega\varepsilon \text{rot}_\varphi (\hat{z} E_{z\kappa}) \right), \quad (4.48)$$

где

$$\text{grad}_{\varphi} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi}, \quad \text{rot}_{\varphi} = -\frac{\partial}{\partial r},$$

$$E_{\varphi} = \int_{\kappa = -\infty}^{\infty} E_{\varphi\kappa} d\kappa, \quad H_{\varphi} = \int_{\kappa = -\infty}^{\infty} H_{\varphi\kappa} d\kappa.$$

В точке наблюдения регистрируется поперечная компонента суммарного магнитного поля

$$H_{\varphi}^{\text{sum}} = \int_{\kappa = -\infty}^{\infty} H_{\varphi\kappa}^{\text{sum}} d\kappa,$$

определяемая в соответствии с соотношением (4.48) через соответствующие продольные компоненты электрического и магнитного поля:

$$H_{\varphi\kappa}^{\text{sum}} = \kappa^{-2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial \varphi \partial z} H_{z\kappa}^{\text{sum}} + i\omega\epsilon \frac{\partial}{\partial r} E_{z\kappa}^{\text{sum}} \right),$$

$$E_{z\kappa}^{\text{sum}} = \frac{J}{8\pi} \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} E_{zn\kappa}^{\text{sum}}, \quad H_{z\kappa}^{\text{sum}} = -\frac{iJ}{8\pi} \frac{\text{sgn}(z)}{\omega\mu} \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} H_{zn\kappa}^{\text{sum}},$$

$$\frac{\partial}{\partial r} E_{zn\kappa}^{\text{sum}} = -\frac{2i\kappa^2}{\pi a \gamma} \exp(in\varphi - \gamma|z|) H_n^{(1)'}(\kappa r) / H_n^{(1)}(\kappa a),$$

$$\frac{\partial^2}{\partial \varphi \partial z} H_{zn\kappa}^{\text{sum}} = \frac{2in^2}{\pi a^2} \gamma \text{sgn}(z) \exp(in\varphi - \gamma|z|) H_n^{(1)}(\kappa r) / H_n^{(1)'}(\kappa a),$$

следовательно,

$$H_{\varphi\kappa}^{\text{sum}} = \frac{J}{8\pi} \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \exp(in\varphi - \gamma|z|) \left[-\frac{2in^2}{\omega\mu r} \frac{i\gamma}{\pi a^2 \kappa^2} H_n^{(1)}(\kappa r) / H_n^{(1)'}(\kappa a) - \right. \\ \left. - i\omega\epsilon \frac{2i}{\pi a \gamma} H_n^{(1)'}(\kappa r) / H_n^{(1)}(\kappa a) \right].$$

В результате получим:

$$H_{\varphi}^{\text{sum}} = \frac{J}{4a\omega\mu\pi^2} \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} e^{in\varphi} \int_{\kappa = -\infty}^{\infty} \exp(-\gamma|z|) \left[\frac{\gamma}{ra} \left(\frac{n}{\kappa} \right)^2 \times \right. \\ \left. \times H_n^{(1)}(\kappa r) / H_n^{(1)'}(\kappa a) + k^2 \frac{1}{\gamma} H_n^{(1)'}(\kappa r) / H_n^{(1)}(\kappa a) \right] d\kappa =$$

$$= \frac{J}{4a\omega\mu\pi^2} \sum_{n=0}^{n=\infty} \beta_n \cos(n\varphi) \int_{\kappa=-\infty}^{\infty} \exp(-\gamma|z|) F_n(a, r, k, \kappa) d\kappa,$$

где

$$F_n(a, r, k, \kappa) = \frac{\gamma}{ra} \left(\frac{n}{\kappa}\right)^2 H_n^{(1)}(\kappa r) / H_n^{(1)'}(\kappa a) + \\ + \frac{k^2}{\gamma} H_n^{(1)'}(\kappa r) / H_n^{(1)}(\kappa a),$$

$\beta_0 = 1$, $\beta_n = 2$ при $n > 0$.

Применяя соотношения

$$H_n^{(1)}(-\kappa r) / H_n^{(1)'}(-\kappa a) = -H_n^{(2)}(\kappa r) / H_n^{(2)'}(\kappa a),$$

$$H_n^{(1)'}(-\kappa r) / H_n^{(1)}(-\kappa a) = -H_n^{(2)'}(\kappa r) / H_n^{(2)}(\kappa a),$$

можно последнее выражение записать также в виде:

$$H_\varphi^{\text{sum}} = \frac{J}{4a\omega\mu\pi^2} \sum_{n=0}^{n=\infty} \beta_n \cos(n\varphi) \int_{\kappa=-\infty}^{\infty} \exp(-\gamma|z|) [F_n(a, r, k, \kappa) + \\ + F_n(a, r, k, -\kappa)] d\kappa,$$

$$F_n(a, r, k, \kappa) + F_n(a, r, k, -\kappa) = 2i \left[-\frac{\gamma}{ra} \left(\frac{n}{\kappa}\right)^2 A_n + \frac{k^2}{\gamma} B_n \right],$$

$$A_n = (Y_n'(\kappa a) J_n(\kappa r) - Y_n(\kappa r) J_n'(\kappa a)) / ([Y_n'(\kappa a)]^2 + [J_n'(\kappa a)]^2),$$

$$B_n = (Y_n'(\kappa r) J_n(\kappa a) - Y_n(\kappa a) J_n'(\kappa r)) / ([Y_n(\kappa a)]^2 + [J_n(\kappa a)]^2).$$

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ПЕРЕВАЛА ДЛЯ ЧИСЛЕННОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ

Рассмотрим вопрос о вычислении интегралов вида ($z \geq 0$, $r \geq a$):

$$U_n = \int_{\kappa=-\infty}^{\infty} \exp(-\gamma z) H_n^{(1)'}(\kappa r) / H_n^{(1)}(\kappa a) \frac{d\kappa}{\gamma},$$

$$V_n = \int_{\kappa=-\infty}^{\infty} \exp(-\gamma z) H_n^{(1)}(\kappa r) / H_n^{(1)'}(\kappa a) \gamma k^{-2} d\kappa,$$

входящих в определение φ -компоненты магнитного поля,

$$H_{\varphi}^{\text{sum}} = \frac{J}{4a\omega\mu^2} \sum_{n=0}^{n=\infty} \beta_n \cos(n\varphi) A_n, \quad A_n = \left(\frac{n^2}{ra} V_n + k^2 U_n \right). \quad (4.49)$$

Ниже для упрощения записи будем рассматривать только интеграл U_n . (Интеграл V_n рассматривается аналогично).

Применим конформное преобразование

$$\kappa = k \sin \theta, \quad \gamma = -ik \cos \theta,$$

$$U_n = i \int_{\Gamma} \exp(ikz \cos \theta) H_n^{(1)'}(kr \sin \theta) / H_n^{(1)}(ka \sin \theta) d\theta,$$

$$\Gamma = (-\pi/2 + \arg k + i\infty, \pi/2 - \arg k - i\infty).$$

Будем полагать, что при больших значениях κ выполняется

$$H_n^{(1)'}(\kappa r) / H_n^{(1)}(\kappa a) \sim i(a/r)^{1/2} \exp[i\kappa(r-a)], \quad (4.50)$$

тогда

$$U_n = i \int_{\Gamma} \exp[ikR_- \cos(\theta - \theta_s)] F(\theta) d\theta,$$

$$F(\theta) = \exp[-ik \sin \theta(r-a)] H_n^{(1)'}(kr \sin \theta) / H_n^{(1)}(ka \sin \theta),$$

$$R_- = [z^2 + (r-a)^2]^{1/2}, \quad \operatorname{tg} \theta_s = (r-a)/z.$$

Контур скорейшего спуска определяется по формуле

$$\operatorname{Re}[k \cos(\theta - \theta_s)] = \operatorname{Re} k.$$

Обозначим

$$\theta' = \operatorname{Re} \theta, \quad \theta'' = \operatorname{Im} \theta, \quad \Delta = \theta' - \theta_s, \quad \alpha = \operatorname{Im} k / \operatorname{Re} k.$$

Найдем конкретный вид зависимости θ' (θ'') вдоль перевального контура:

$$\cos \Delta \operatorname{ch} \theta'' + \alpha \sin \Delta \operatorname{sh} \theta'' = 1,$$

$$\alpha^2 (1 - \cos^2 \Delta) \operatorname{sh}^2 \theta'' = (1 - \cos \Delta \operatorname{ch} \theta'')^2,$$

$$\cos \Delta = [\operatorname{ch} \theta'' \pm \alpha \operatorname{sh}^2 \theta'' (\alpha^2 + 1)^{1/2}] / (\operatorname{ch}^2 \theta'' + \alpha^2 \operatorname{sh}^2 \theta'').$$

Можно показать, что в выражении для $\cos \Delta$ должен быть выбран знак плюс (при условии, что при $\theta'' > 0$ $\theta' < \theta_s$).

Нетрудно определить

$$\frac{d\theta'}{d\theta''} = (\cos \Delta \operatorname{sh} \theta'' + \alpha \sin \Delta \operatorname{ch} \theta'') / (\sin \Delta \operatorname{ch} \theta'' - \alpha \cos \Delta \operatorname{sh} \theta'').$$

$$\text{При } \theta'' \rightarrow 0 \quad d\theta' / d\theta'' \rightarrow \Delta'_0 = \alpha - (\alpha^2 + 1)^{1/2} < 0.$$

$$\text{При } \theta'' \rightarrow \pm \infty \quad \cos \Delta \rightarrow \alpha (\alpha^2 + 1)^{-1/2} = \sin(\arg k).$$

В результате имеем (переходя к интегрированию по половине контура скорейшего спуска, проходящего в области $\theta'' > 0$):

$$U_n = -i \int_0^{\infty} [f(\theta'') + f(-\theta'')] d\theta'',$$

$$f(\theta'') = \exp [ikR_- \cos(\theta - \theta_s)] F(\theta) \left(\frac{d\theta'}{d\theta''} + i \right).$$

Очевидно:

$$\frac{d\theta'}{d\theta''} \Big|_{\theta''} = \frac{d\theta'}{d\theta''} \Big|_{\theta''},$$

$$\cos \theta = \cos(\Delta + \theta_s + i\theta''), \quad \sin \theta = \sin(\Delta + \theta_s + i\theta'').$$

Практика численных расчетов показала высокую эффективность данного метода и его применимость как для случая $z=0$, так и для случая $r=a$. (При $z=0$ должно выполняться $r>a$, а при $r=a$ должно быть $z>0$, т. е. должно выполняться: $R_- > 0$.)

УЧЕТ ПОЛЮСА ПЕРВОГО ПОРЯДКА $\kappa_p = 0$

Подынтегральные функции в полученных выше выражениях имеют особенности при $\kappa=0$ (полюса первого порядка), выделение которых необходимо выполнять в явном виде (С. Б. Попов).¹

В интеграле U_n при $\kappa \approx 0$ $f_n(\kappa, r, a) \sim g_n(r, a)/\kappa$, где

$$f_n(\kappa, r, a) = \exp(-i\kappa b) H_n^{(1)'}(\kappa r) / H_n^{(1)}(\kappa r),$$

$$g_n(r, a) = \lim_{\kappa \rightarrow 0} \kappa f_n(\kappa, r, a) = -na^n / r^{n+1}, \quad b = r - a.$$

Множитель $\exp(-i\kappa b)$ добавлен для учета асимптотики (4.50). В интеграле V_n при $\kappa \approx 0$ $\tilde{f}_n(\kappa, r, a) \approx \kappa \tilde{g}_n(r, a)$, где

$$\tilde{f}_n(\kappa, r, a) = \exp(-i\kappa b) H_n^{(1)}(\kappa r) / H_n^{(1)'}(\kappa a),$$

$$\tilde{g}_n(r, a) = \lim_{\kappa \rightarrow 0} \tilde{f}_n(\kappa, r, a) / \kappa = -a^{n+1} / (nr^n).$$

¹ Методика вычислений предложена С. Б. Поповым.

Представим искомые интегралы в виде

$$\begin{aligned}
 U_n &= \int_{\kappa=-\infty}^{\infty} \exp(-\gamma z + i\kappa b) \left[f_n(\kappa, r, a) - \frac{g_n(r, a)}{\kappa} \right] \frac{d\kappa}{\gamma} + \\
 &+ g_n(r, a) \int_{\kappa=-\infty}^{\infty} \exp(-\gamma z + i\kappa b) \frac{d\kappa}{\kappa\gamma}, \\
 V_n &= \int_{\kappa=-\infty}^{\infty} \exp(-\gamma z + i\kappa b) \tilde{f}_n(\kappa, r, a) (\kappa^2 - k^2) \kappa^{-2} \frac{d\kappa}{\gamma} = \\
 &= \int_{\kappa=-\infty}^{\infty} \exp(-\gamma z + i\kappa b) \tilde{f}_n(\kappa, r, a) \frac{d\kappa}{\gamma} - k^2 \tilde{g}_n(r, a) \int_{\kappa=-\infty}^{\infty} \times \\
 &\times \exp(-\gamma z + i\kappa b) \frac{d\kappa}{\kappa\gamma} - k^2 \int_{\kappa=-\infty}^{\infty} \exp(-\gamma z + i\kappa b) \left[\tilde{f}_n(\kappa, r, a) - \right. \\
 &\left. - \kappa \tilde{g}_n(r, a) \right] \kappa^{-2} \frac{d\kappa}{\gamma}.
 \end{aligned}$$

После подстановки в выражение (4.49), отвечающее общему члену ряда под номером n , получим:

$$\begin{aligned}
 A_n &= \frac{n^2}{ra} V_n + k^2 U_n = \frac{n^2}{ra} \left[\int_{\kappa=-\infty}^{\infty} \exp(-\gamma z + i\kappa b) \tilde{f}_n(\kappa, r, a) \frac{d\kappa}{\gamma} - \right. \\
 &- k^2 \int_{\kappa=-\infty}^{\infty} \exp(-\gamma z + i\kappa b) \left[\tilde{f}_n(\kappa, r, a) - \kappa \tilde{g}_n(r, a) \right] \kappa^{-2} \frac{d\kappa}{\gamma} \left. \right] + \\
 &+ k^2 \int_{\kappa=-\infty}^{\infty} \exp(-\gamma z + i\kappa b) \left[f_n(\kappa, r, a) - \frac{g_n(r, a)}{\kappa} \right] \frac{d\kappa}{\gamma},
 \end{aligned}$$

так как

$$g_n(r, a) - \frac{n^2}{ra} \tilde{g}_n(r, a) = 0. \quad (4.51)$$

При записи в таком виде применение метода наискорейшего спуска (метода перевала), описанное в предыдущем разделе, должно давать более точный результат, так как в подынтегральных выражениях здесь устранены особенности вида $1/\kappa$ при $\kappa \sim 0$.

АСИМПТОТИКА ПРИ $r > a$

Рассмотрим асимптотику исследуемых интегралов при $r - a \Rightarrow \infty$, воспользовавшись асимптотикой функций Ханкеля, стоящих и в числителе, и в знаменателе подынтегральных выражений:

$$\frac{H_n^{(1)'}(\kappa r)}{H_n^{(1)'}(\kappa a)} = e^{i\kappa(r-a)} \frac{H_n^{(1)'}(\kappa r)}{H_n^{(1)}(\kappa a)} e^{-i\kappa(r-a)} \approx \\ \approx H_0^{(1)}[\kappa(r-a)] [\pi\kappa(r-a)/2]^{1/2} \frac{H_n^{(1)'}(\kappa r)}{H_n^{(1)}(\kappa a)} e^{-i\kappa(r-a) + i\pi/4},$$

$$\frac{H_n^{(1)}(\kappa r)}{H_n^{(1)'}(\kappa a)} = e^{i\kappa(r-a)} \frac{H_n^{(1)}(\kappa r)}{H_n^{(1)'}(\kappa a)} e^{-i\kappa(r-a)} \approx \\ \approx H_0^{(1)}[\kappa(r-a)] [\pi\kappa(r-a)/2]^{1/2} \frac{H_n^{(1)}(\kappa r)}{H_n^{(1)'}(\kappa a)} e^{-i\kappa(r-a) + i\pi/4}.$$

Применяя асимптотическое приближение, получаемое методом перевала [2],

$$\int_{\Gamma} \exp[\Psi(\theta)] F(\theta) d\theta \sim \exp[\Psi(\theta_s)] F(\theta_s) [-2\pi/\Psi''(\theta_s)]^{1/2},$$

$$\Psi(\theta) = ik\rho \cos(\theta - \theta_s), \quad \operatorname{tg} \theta_s = b/z,$$

можно получить

$$\int_{\kappa = -\infty}^{\infty} \exp(-\gamma z) H_0^{(1)}(\kappa b) \kappa B(\kappa) \frac{d\kappa}{\gamma} \sim 2B(\kappa_s) \exp(ik\rho) / \rho + O(\rho^{-2}),$$

где $\rho = (z^2 + b^2)^{1/2}$, $\kappa_s = k \sin \theta_s = kb/\rho$, $b, z > 0$, $B(\kappa)$ — функция, не имеющая экспоненциального поведения, без особенностей, или особенности которой достаточно удалены от точки перевала κ_s . В результате имеем:

$$U_n = \int_{\kappa=-\infty}^{\infty} \exp(-\gamma z) H_n^{(1)'}(\kappa r) / H_n^{(1)}(\kappa a) \frac{d\kappa}{\gamma} \sim \\ \sim \exp[ikz^2/R_- + i\pi/4] [2\pi/(kR_-)]^{1/2} \frac{H_n^{(1)'}(\kappa r)}{H_n^{(1)}(\kappa a)} \Big|_{\kappa=k \frac{r-a}{R_-}},$$

$$V_n = \int_{\kappa=-\infty}^{\infty} \exp(-\gamma z) H_n^{(1)}(\kappa r) / H_n^{(1)'}(\kappa a) \gamma \kappa^{-2} d\kappa \sim \\ \sim \exp[ikz^2/R_- + i\pi/4] [2\pi/(kR_-)]^{1/2} \times \\ \times [1 - (k/\kappa)^2] \frac{H_n^{(1)}(\kappa r)}{H_n^{(1)'}(\kappa a)} \Big|_{\kappa=k \frac{r-a}{R_-}}.$$

Отсюда получим:

$$H_{\Phi}^{\text{sum}} = \frac{J}{4a\omega\mu\pi^2} \exp[ikz^2/R_- + i\pi/4] [2\pi/(kR_-)]^{1/2} \times \\ \times \sum_{n=0}^{n=\infty} \beta_n \cos(n\varphi) \left\{ k^2 \frac{H_n^{(1)'}(\kappa r)}{H_n^{(1)}(\kappa a)} + \frac{n^2}{ra} [1 - (k/\kappa)^2] \frac{H_n^{(1)}(\kappa r)}{H_n^{(1)'}(\kappa a)} \right\} \Big|_{\kappa=k \frac{r-a}{R_-}}.$$

Сравнение результатов по данным асимптотикам с прямыми численными расчетами показало высокую эффективность и широкий диапазон применимости предлагаемых асимптотик.

Изложенные выше алгоритмы реализованы на ЭВМ в виде комплекса прикладных программ.

Для различных частот и электрических параметров окружающего пространства было выполнено численное исследование диаграмм направленности поперечного магнитного диполя в средах с потерями.

На рис. 4.18—4.20 приведены диаграммы направленности в азимутальной плоскости $z=0$ излучения поперечного магнитного диполя с моментом тока $J=0,079$ на поверхности кругового цилиндра радиуса $a=0,089$ м. Излучаемое поле рассматривается в поперечной плоскости цилиндра на расстоянии $r=20a$ от оси цилиндра для различных частот и проводимостей окружающего пространства.

Все приведенные результаты позволяют сделать вывод о достаточно высокой азимутальной направленности поля по-

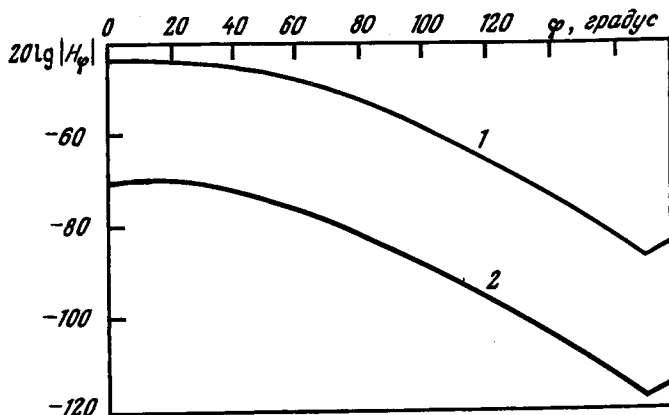


Рис. 4.18. Диаграмма направленности поля H_ϕ на расстоянии $r=20a$ для поперечного магнитного диполя с частотой $f=3 \cdot 10^6$ Гц. Радиус цилиндра $a=0,089$ м в среде с $\epsilon_r=80$ и проводимостью $\sigma=10^{-2}$ См/м (1) и $\sigma=10^{-1}$ См/м (2)

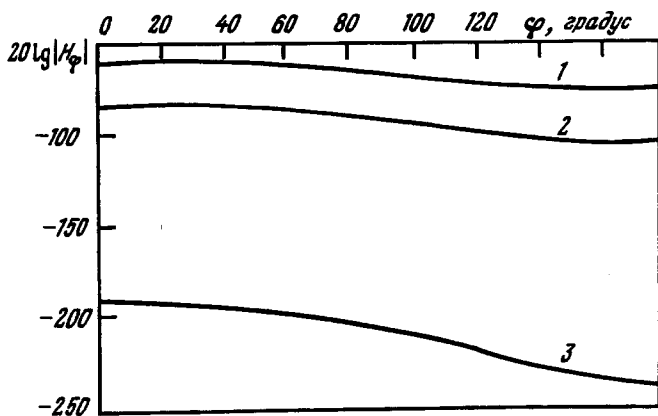


Рис. 4.19. Диаграмма направленности поля H_ϕ на расстоянии $r=20a$ для поперечного магнитного диполя с частотой $f=3 \cdot 10^7$ Гц. Радиус цилиндра $a=0,089$ м в среде с $\epsilon_r=80$ и проводимостью $\sigma=10^{-2}$ См/м (1), $\sigma=10^{-1}$ См/м (2), $\sigma=1$ См/м (3)

перечного магнитного диполя, причем частота поля $f=2 \cdot 10^6$ Гц является наилучшей как с точки зрения направленности поля, так и энергии электромагнитного поля в средах с большой проводимостью.

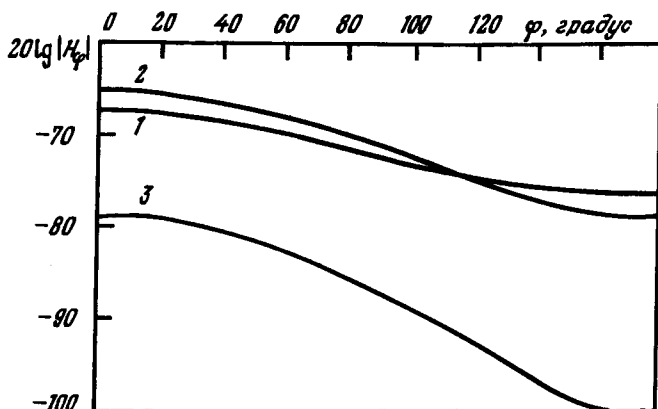


Рис. 4.20. Диаграмма направленности поля H_ϕ на расстоянии $r=20 a$ для поперечного магнитного диполя с частотой $f=2 \cdot 10^6$ Гц. Радиус цилиндра $a=0,089$ м в среде с $\epsilon_r=80$ и проводимостью $\sigma=10^{-2}$ См/м (1), $\sigma=10^{-1}$ См/м (2), $\sigma=1$ См/м (3)

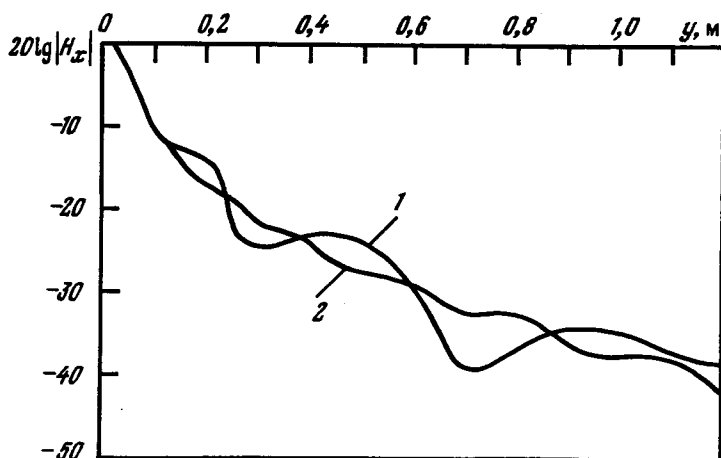


Рис. 4.21. Распределение компоненты поля H_z в плоскостной модели зонда (см. рис. 4.2) в зависимости от координаты y при наличии волноводного эффекта в двухслойной среде:

$f=1$ ГГц, $\epsilon_{r1}=40$, $\sigma_1=0,01$ См/м; $\epsilon_{r2}=40$, $\sigma_2=1$ См/м; 1 — толщина первого слоя $d=0,3$ м, 2 — $d=1$ м

Влияние неоднородного околоскважинного пространства на характер распределения поля приведено на рис. 4.21, где показан волноводный эффект при монохроматическом воз-

буждении с частотой 1 ГГц горизонтального магнитного диполя, лежащего на идеально проводящей плоскости в двухслойной среде (см. рис. 4.2). Магнитный момент тока J_x принимался равным единице и был направлен вдоль оси x , горизонтальная компонента полного магнитного поля H_x была вычислена на идеально проводящей плоскости $z=0$ вдоль прямой, проходящей перпендикулярно к оси магнитного диполя (щели). Относительная диэлектрическая проницаемость первого слоя $\epsilon_{r1}=4$, проводимость $\sigma_1=10^{-2}$ См/м, соответствующие параметры второго полубесконечного слоя $\epsilon_{r2}=40$, $\sigma_2=1$ См/м. Кривая 1 соответствует толщине первого слоя $d=0,3$ м, кривая 2 — толщине $d=1$ м. Осциллирующий характер распределения поля H_x в зависимости от расстояния от источника обусловлен суперпозицией различных волноводных мод, возбуждаемых в данных структурах. Как и следовало ожидать, с увеличением толщины первого, низкпроводящего слоя характер кривой становится менее осциллирующим.

ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ЗОНДИРОВАНИЕ ГОРИЗОНТАЛЬНЫХ СКВАЖИН С ПРИМЕНЕНИЕМ ОБЫЧНЫХ ЗОНДОВ БОКОВОГО КАРОТАЖА

Существенную роль среди методов геофизических исследований скважин играют электрические методы и, в частности, боковое каротажное зондирование скважин (БКЗ). Основы теории электроразведки постоянным током и БКЗ были разработаны С. С. Стефанеску и др. [12], В. А. Фоком, В. Р. Бурсиным [1], А. Н. Тихоновым [8] и получили дальнейшее развитие в работах Л. М. Альпина и др. [11], С. Г. Комарова [4], Дж. Р. Уэйта [9].

При вскрытии проницаемых пластов горизонтальными скважинами происходит внедрение фильтрата бурового раствора с образованием в околоскважинном пространстве неоднородной зоны проникновения. В отличие от вертикальных скважин, когда геометрия и физические процессы в приствольном пространстве, как правило, имеют азимутальную симметрию относительно оси скважины, процессы для горизонтальных скважин обладают трехмерной неоднородностью. В связи с этим, наряду с созданием принципиально новых методов каротажа горизонтальных скважин, представленных в главе 4, важное прикладное значение имеет обобщение методики обычных зондов БКЗ для горизонтальных стволов с произвольной неоднородностью околоскважинного пространства [3].

5.1. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОЛЯ ТОЧЕЧНОГО ИСТОЧНИКА ПОСТОЯННОГО ТОКА В ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ СКВАЖИНЕ В АНИЗОТРОПНОЙ СРЕДЕ

Потенциал электрического поля φ , создаваемого точечным источником постоянного тока силой I , находящимся в среде с неоднородной электропроводностью (рис. 5.1), удовлетворяет уравнению Пуассона

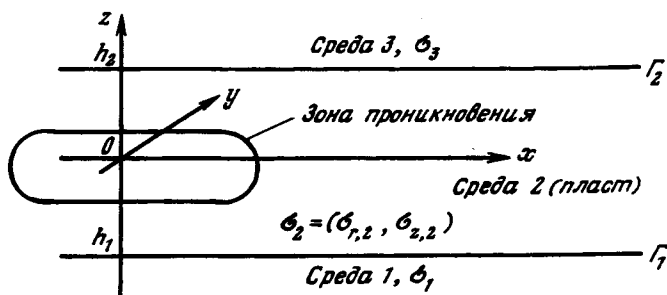


Рис. 5.1. Сечение вертикальной плоскостью (xz) скважины (с зоной проникновения), проходящей горизонтально в анизотропном пласте конечной толщины

$$\operatorname{div} \vec{j} = I \cdot \delta(\vec{R}), \quad \vec{R} = (x, y, z), \quad (5.1)$$

$$j_v = -\sigma_v \frac{\partial \varphi}{\partial v}, \quad v = x, y, z,$$

где $\vec{j} = (j_x, j_y, j_z)$ — вектор плотности электрического тока источника, помещенного в начало координат, ось y совпадает с осью горизонтальной скважины, $\sigma = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ — тензор коэффициента удельной электрической проводимости пласта.

Предполагая, что физические и геометрические параметры пласта и зоны проникновения не изменяются вдоль оси скважины (или, по крайней мере, на некотором отрезке горизонтального ствола, где находится в данный момент зонд БКЗ), получаем, что задача симметрична относительно плоскостей $x=0$ и $y=0$. Тогда решение уравнения (5.1) достаточно искать в полубесконечной трехмерной области Ω :

$$\Omega = (x > 0) \cap (y > 0) \cap (-\infty < z < +\infty).$$

Основные трудности численного решения уравнения (5.1) связаны с неограниченностью области, с трехмерностью задачи, а также с произвольным неоднородным распределением проводимости σ в зоне проникновения и вмещающих пород со стороны кровли и подошвы пласта (см. рис. 5.1).

Заменим полубесконечную область Ω на параллелепипед $\hat{\Omega}$:

$$\hat{\Omega} = (0 < x < X_{\max}) \times (0 < y < Y_{\max}) \times (Z_{\min} < z < Z_{\max}),$$

содержащий начало координат, с границами, достаточно далеко удаленными от начала координат, где расположен источник. На плоскостях симметрии $x=0$ и $y=0$ заданы граничные условия второго рода, $\partial\phi/\partial\vec{n}=0$ (где $\vec{n}$ — вектор нормали к соответствующей граничной поверхности). На внешних удаленных границах параллелепипеда, не являющихся осями симметрии задачи, в качестве граничных условий заданы значения потенциала ϕ электрического поля, определяемые в виде аналитического решения соответствующей вспомогательной задачи для трехслойной среды, представленной ниже.

Сформулированную задачу будем решать методом конечных разностей [6]. В рассматриваемой области $\hat{\Omega}$ введем неравномерную разностную сетку по пространству $\omega = \omega_{hx} \times \omega_{hy} \times \omega_{hz}$, в ячейках которой будем рассматривать значения электрического потенциала. Размеры разностных ячеек увеличиваются по геометрической прогрессии при удалении по каждой из координат от источника со своими показателями геометрической прогрессии: $q_x, q_y, q_{z,1}, q_{z,2}$. Разностная схема, аппроксимирующая уравнение Пуассона, на такой сетке будет иметь следующий вид:

$$[A_{i+1/2,j,k}^x f_x]_x + [A_{i,j+1/2,k}^y f_y]_y + [A_{i,j,k+1/2}^z f_z]_z + \langle q \rangle = 0,$$

где

$$\langle q \rangle = V^{-1} \iiint_V I \delta(r) dV = \begin{cases} 1/(4V_{0,0,0}), & \text{при } i=j=k=0; \\ 0, & \text{при } i, j, k \neq 0; \end{cases}$$

предполагается, что источник тока находится в разностной ячейке с индексами по направлениям x, y, z , равными $i=j=k=0$, $V_{0,0,0}$ — объем этой ячейки. Значение 4 в знаменателе связано с тем, что в силу предполагаемой симметрии задачи относительно плоскостей $x=0$ и $y=0$ мы рассматриваем только «четверть» полного трехмерного объема. Сеточная переменная f аппроксимирует функцию электрического потенциала ϕ . При этом мы предполагаем, что коэффициент удельной проводимости σ не зависит от координаты y , но, как отмечалось выше, он является тензором ($\sigma = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$), компоненты которого σ_x и σ_y равны: $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_r$.

Тогда коэффициенты разностной схемы имеют вид:

$$A_{i,j+1/2,k}^y = \sigma_r(x_i, z_k),$$

$$A_{i+1/2,j,k}^x = \frac{1}{z(k+1/2) - z(k-1/2)} \int_{z(k-1/2)}^{z(k+1/2)} \left[\frac{1}{x(i+1) - x(i)} \int_{x(i)}^{x(i+1)} \frac{dx}{\sigma_r(X, Z)} \right]^{-1} dz,$$

$$A_{i,j,k+1/2}^z = \frac{1}{x(i+1/2) - x(i-1/2)} \int_{x(i-1/2)}^{x(i+1/2)} \left[\frac{1}{z(k+1) - z(k)} \int_{z(k)}^{z(k+1)} \frac{dz}{\sigma_z(x, z)} \right]^{-1} dx,$$

где

$x(i) = x_i$, $y(j) = y_j$, $z(k) = z_k$ — узлы разностной сетки,

$x(i+1/2) = (x_i + x_{i+1})/2$, $y(j+1/2) = (y_j + y_{j+1})/2$, и т. п.

В результате численных экспериментов было установлено, что полученная система линейных алгебраических уравнений имеет матрицу с довольно плохой обусловленностью. Поэтому известные итерационные методы давали плохую скорость сходимости, и потребовалось применение специальных методов обращения плохо обусловленных матриц большой размерности. В данной работе для определения значений сеточной функции f используется подпрограмма T92 обращения разреженных матриц большой размерности, основанная на использовании неполного, приближенного обращения матрицы на основе метода Гаусса с дальнейшим уточнением решения итерационным методом минимальных невязок.

Благодаря принципу суперпозиции данный алгоритм допускает обобщение на решение задач о поле электрического потенциала для электродов произвольной формы. Кроме того, разработанный алгоритм допускает задание произвольной геометрии зоны проникновения и распределение в ней удельного электрического сопротивления.

5.2. АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ДЛЯ ТОЧЕЧНОГО ИСТОЧНИКА В ТРЕХСЛОЙНОЙ АНИЗОТРОПНОЙ СРЕДЕ

Рассмотрим трехслойную среду с плоскопараллельными границами разделов сред $\Gamma_{1,2}$ (см. рис. 5.1). Точечный источник электрического тока расположен на оси z в начале декартовой системы координат (ось z направлена ортогонально границам

разделов сред). Будем полагать, что среде 1 соответствует область $z < h_1 \leq 0$, среде 2 — область $h_1 < z < h_2$ (область пласта), среде 3 — область $z > h_2 \geq 0$. Предположим, что среды 1 и 3 изотропные со значениями удельного электрического сопротивления σ_1 и σ_3 соответственно, среда 2 анизотропная, $\sigma_2 = (\sigma_{r2}, \sigma_{z2})$.

Рассмотрим сначала пласт бесконечной толщины с однородно-анизотропной электрической проводимостью (т. е. $\sigma = (\sigma_r, \sigma_z)$, где $\sigma_r \neq \sigma_z$). В этом случае решение, очевидно, будет удовлетворять уравнению

$$\frac{1}{\tilde{R}^2} \frac{\partial}{\partial \tilde{R}} \left(\tilde{R}^2 \frac{\partial \Phi}{\partial \tilde{R}} \right) = 0, \quad \tilde{R} = (r^2 / \sigma_r + z^2 / \sigma_z)^{1/2}, \quad r = (x^2 + y^2)^{1/2},$$

откуда имеем:

$$\Phi_{\text{hom}}(x, y, z) = \Phi_{\text{hom}}(r, z) = C_1 / \tilde{R}.$$

Для определения константы C_1 воспользуемся очевидным соотношением:

$$\oint_{\partial V} \vec{j} d\vec{s} = I,$$

справедливым для любого объема V , содержащего источник электрического тока I . Выбирая в качестве V цилиндрическое тело $(0 < r < \rho)(-\delta < z < \delta)$, имеем:

$$\begin{aligned} I &= -2\pi\rho\sigma_r \int_{-\delta}^{\delta} \frac{\partial \Phi(\rho, z)}{\partial r} dz - 2\pi\sigma_z \int_0^{\rho} \left[\frac{\partial \Phi(r, \delta)}{\partial z} - \frac{\partial \Phi(r, -\delta)}{\partial z} \right] r dr = \\ &= 4\pi C_1 \sigma_r \sqrt{\sigma_z}, \end{aligned}$$

откуда

$$\Phi_{\text{hom}}(r, z) = \frac{I}{4\pi\sqrt{\sigma_r\sigma_z}} [r^2 + z^2\sigma_r/\sigma_z]^{-1/2}.$$

Будем искать решение задачи в трехслойной среде без скважины и зоны проникновения в виде:

$$\Phi^{(1)}(r, z) = \frac{I}{4\pi\sigma} \int_0^{\infty} C(\lambda) \exp(\lambda z) J_0(\lambda r) d\lambda,$$

$$\varphi^{(2)}(r, z) = \frac{1}{4\pi\bar{\sigma}} \int_0^\infty [\exp(-\lambda|\alpha z|) + A(\lambda)\exp(-\lambda\alpha z) + B(\lambda)\exp(\lambda\alpha z)] J_0(\lambda r) d\lambda,$$

$$\varphi^{(3)}(r, z) = \frac{1}{4\pi\bar{\sigma}} \int_0^\infty D(\lambda)\exp(-\lambda z) J_0(\lambda r) d\lambda,$$

где $\bar{\sigma} = \sqrt{\sigma_{r2}\sigma_{z2}}$; $\alpha = \sqrt{\sigma_{r2}/\sigma_{z2}}$; $\varphi^{(j)}$ означает потенциал электрического поля в j -м слое. Функции $A(\lambda)$, $B(\lambda)$, $C(\lambda)$, $D(\lambda)$ определяются из условий непрерывности на границах раздела двух сред потенциала и нормальной составляющей электрического тока:

$$[\varphi]_{|z=h_{1,2}} = 0, \quad \left[\sigma_z \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right]_{|z=h_{1,2}} = 0,$$

откуда имеем четыре уравнения:

$$\begin{aligned} C \exp(\lambda h_1) &= \exp(\lambda \alpha h_1) (1 + B) + A \exp(-\lambda \alpha h_1), \\ D \exp(-\lambda h_2) &= \exp(-\lambda \alpha h_2) (1 + A) + B \exp(\lambda \alpha h_2), \\ C \exp(\lambda h_1) &= \mu_1 [\exp(\lambda \alpha h_1) (1 + B) - A \exp(-\lambda \alpha h_1)], \\ -D \exp(-\lambda h_2) &= \mu_3 [-\exp(-\lambda \alpha h_2) (1 + A) + B \exp(\lambda \alpha h_2)], \end{aligned}$$

где $\mu_{1,3} = \alpha \sigma_{z2} / \sigma_{1,3} = \bar{\sigma}_2 / \sigma_{1,3}$.

Решая полученную систему уравнений, находим:

$$\begin{aligned} A(\lambda) &= \exp(2\lambda \alpha h_1) (1 - \mu_1) [(1 - \mu_3) \exp(-2\lambda \alpha h_2) - 1 - \mu_3] / \Delta, \\ B(\lambda) &= \exp(-2\lambda \alpha h_2) (1 - \mu_3) [(1 - \mu_1) \exp(-2\lambda \alpha h_1) - 1 - \mu_1] / \Delta, \\ \Delta &= (1 + \mu_1)(1 + \mu_3) - (1 - \mu_1)(1 - \mu_3) \exp[-2\lambda \alpha (h_2 - h_1)], \\ C(\lambda) &= \exp[\lambda(\alpha - 1)h_1] [1 + B + A \exp(-2\lambda \alpha h_1)], \\ D(\lambda) &= \exp[-\lambda(\alpha - 1)h_2] [1 + A + B \exp(2\lambda \alpha h_2)]. \end{aligned}$$

Введем обозначения:

$$\begin{aligned} q_1 &= (1 - \mu_1) / (1 + \mu_1), \quad q_3 = (1 - \mu_3) / (1 + \mu_3), \\ h_{1,2} &= \alpha h_{1,2}, \quad h_{21} = \alpha (h_2 - h_1), \quad \tilde{z} = \alpha z. \end{aligned}$$

Эффективность вычисления потенциала в каждой из сред резко повышается при использовании метода разложения коэффициентов $A(\lambda)$, $B(\lambda)$, $C(\lambda)$, $D(\lambda)$ в степенные ряды (С. Б. Попов). Принимая во внимание, что $|q_{1,3}| < 1$, разложения коэффициентов можно представить в виде:

$$A(\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} (q_1 q_3)^n \exp[-2\lambda n \hbar] - \sum_{n=0}^{\infty} q_1^{n+1} q_3^n \exp[-2\lambda n \hbar_{21} + 2\lambda \hbar_1],$$

$$B(\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} (q_1 q_3)^n \exp[-2\lambda n \hbar_{21}] - \sum_{n=0}^{\infty} q_1^n q_3^{n+1} \exp[-2\lambda n \hbar_{21} - 2\lambda \hbar_2].$$

Подставим эти выражения в интегральное представление функции $\varphi^{(2)}$. Заметим, что коэффициенты $q_{1,3}$ постоянны (определяются только значениями удельной проводимости рассматриваемых сред). В результате искомый интеграл сведется к сумме слагаемых вида

$$I_n(r, z) = Q_n \int_0^{\infty} \exp[-\lambda P_n(z)] J_0(\lambda r) d\lambda,$$

где $P_n(z)$ — некоторая неотрицательная функция от переменной z .

Тогда каждое слагаемое приобретает следующую форму:

$$I_n(r, z) = Q_n \psi(r, P_n(z)),$$

где $\psi(a, b) = (a^2 + b^2)^{-1/2}$.

В результате можно получить следующее выражение для функции электрического потенциала в среде 2:

$$\begin{aligned} \varphi^{(2)}(r, z) = \frac{I}{4\pi\sigma} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} (q_1 q_3)^n [\psi(r, 2n\hbar_{21} + \tilde{z}) + \psi(r, 2n\hbar_{21} - \tilde{z})] - \right. \\ \left. - \sum_{n=0}^{\infty} [q_1^{n+1} q_3^n \psi(r, 2n\hbar_{21} - 2\hbar_1 + \tilde{z}) + q_1^n q_3^{n+1} \psi(r, 2n\hbar_{21} + \right. \\ \left. + 2\hbar_2 - \tilde{z})] \right\}. \end{aligned}$$

Аналогично можно получить выражения для функции электрического потенциала в остальных средах:

$$\begin{aligned} \varphi^{(1)}(r, z) = & \frac{I}{4\pi\bar{\sigma}} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} (q_1 q_3)^n \psi(r, 2n\hbar_{21} - z_1) + \right. \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} (q_1 q_3)^n \psi(r, 2n\hbar_{21} + 2\hbar_1 - z_1) - \\ & \left. - \sum_{n=0}^{\infty} [q_1^{n+1} q_3^n \psi(r, 2n\hbar_{21} - z_1) + q_1^n q_3^{n+1} \psi(r, 2n\hbar_{21} + 2\hbar_2 - z_1)] \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi^{(3)}(r, z) = & \frac{I}{4\pi\bar{\sigma}} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} (q_1 q_3)^n \psi(r, 2n\hbar_{21} + z_2) + \right. \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} (q_1 q_3)^n \psi(r, 2n\hbar_{21} - 2\hbar_2 + z_2) - \\ & \left. - \sum_{n=0}^{\infty} [q_1^{n+1} q_3^n \psi(r, 2n\hbar_{21} - 2\hbar_1 + z_2) + q_1^n q_3^{n+1} \psi(r, 2n\hbar_{21} + z_2)] \right\}, \end{aligned}$$

где $z_1 = z + (\alpha - 1) \hbar_1$, $z_2 = z + (\alpha - 1) \hbar_2$.

Из этих выражений, в частности, следует:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \left(\frac{4\pi\bar{\sigma}}{I} r \varphi^{(2)} \right)_{|z=0} = 1,$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left(\frac{4\pi\bar{\sigma}}{I} r \varphi^{(2)} \right)_{|z=0} = \frac{2 - q_1 - q_3}{1 - q_1 q_3} - 1 = \frac{2\mu_1 \mu_3}{\mu_1 + \mu_3} = \frac{2\bar{\sigma}}{\sigma_1 + \sigma_3}.$$

Это означает, что кажущееся сопротивление среды

$$\rho_k = \frac{4\pi}{I} R \varphi(x, y, z), \quad R = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}, \quad (5.2)$$

вблизи и вдали от источника (при $z=0$) соответственно равно:

$$\rho_{k0} = 1/\bar{\sigma}, \quad \rho_{k\infty} = 2/(\sigma_1 + \sigma_3), \quad (5.3)$$

где $\bar{\sigma} = \sqrt{\sigma_{r2} \sigma_{z2}}$.

Эти величины равны хорошо известным асимптотикам стандартных зондов метода электрического сопротивления.

5.3. АНАЛИЗ КАЖУЩЕГОСЯ УДЕЛЬНОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ В АНИЗОТРОПНЫХ ПЛАСТАХ

Изложенные выше алгоритмы реализованы на ЭВМ в виде комплекса прикладных программ. Для различных значений толщин, электрических параметров слоев и зоны проникновения было выполнено численное исследование распределения кажущегося удельного сопротивления вдоль оси горизонтальных скважин.

На рис. 5.2 показана геометрия горизонтальной скважины в пласте конечной толщины $h = h_2 - h_1$, параметр анизотропии пласта принимался равным следующим значениям:

$$\alpha = \sqrt{\sigma_{r2}/\sigma_{z2}} = 1; \sqrt{1/4}; \sqrt{4};$$

(индексы «г», «в» на этом и следующих рисунках соответствующим индексам r, z в формулах (5.3)).

На всех приводимых ниже рисунках удельное электрическое сопротивление бурового раствора принималось равным единице: $\rho_p = 1 \text{ Ом} \cdot \text{м}$.

На рис. 5.3, 5.4 приведены кривые кажущегося удельного сопротивления $\rho_k(y)$, измеренные потенциал-зондом для трех положений горизонтальной скважины в изотропном пласте: вблизи подошвы пласта, в середине пласта и вблизи кровли. При этом на рис. 5.3 радиус скважины принимался равным $r_c = 0,1 \text{ м}$, на рис. 5.4 и 5.5 $r_c = 0,3 \text{ м}$. Отсюда следует, что характер кривых зондирования сильно зависит от радиуса скважины (зоны проникновения фильтрата бурового раствора) и расположения горизонтальной скважины в пласте. При

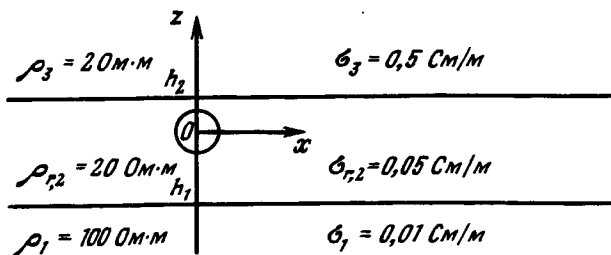


Рис. 5.2. Горизонтальная скважина в анизотропном пласте конечной толщины. Электрическое удельное сопротивление: пласта — $\rho_{r,2}$ (горизонтальная компонента тензора сопротивления); вмещающих пород со стороны кровли — $\rho_3 = 20 \text{ Ом} \cdot \text{м}$; со стороны подошвы пласта — $\rho_1 = 100 \text{ Ом} \cdot \text{м}$

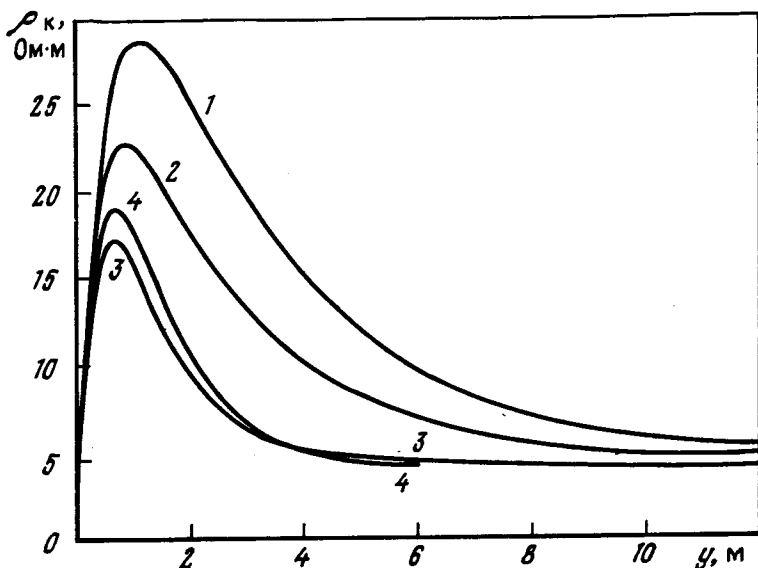


Рис. 5.3. Распределение кажущегося электрического удельного сопротивления потенциал-зонда вдоль оси скважины в изотропном пласте.

Радиус скважины $r_c = 0,1$ м: кривые 1—3 в пласте толщины $h = 3$ м для разного положения горизонтальной скважины относительно кровли и подошвы пласта (см. рис. 5.2); 4— $h = 1$ м

близком расположении скважины к границе высокопроводящей среды со стороны кровли пласта кривая кажущегося сопротивления понижается. На рис. 5.3 кривая 4 соответствует распределению $\rho_k(y)$ для горизонтальной скважины, проходящей на равном удалении от кровли и подошвы пласта толщиной $h = 1$ м. Как и следовало ожидать, кривая 4 незначительно отличается от 3, отвечающей скважине, проходящей на расстоянии $0,5$ м под кровлей в пласте толщиной $h = 3$ м.

Кроме того, из рис. 5.4 можно сделать вывод, что в скважинах с высокопроводящим буровым раствором кривые ρ_k сильно зависят от величины радиуса скважин (зоны проникновения).

На рис. 5.5 приведены кривые ρ_k , отвечающие различным значениям параметра анизотропии $\alpha = \sqrt{\sigma_{r2}/\sigma_{z2}}$ пласта толщиной $h = 3$ м для горизонтальной скважины, проходящей на равном расстоянии от кровли и подошвы пласта. Для сравнения приведена кривая ρ_k в изотропном пласте.

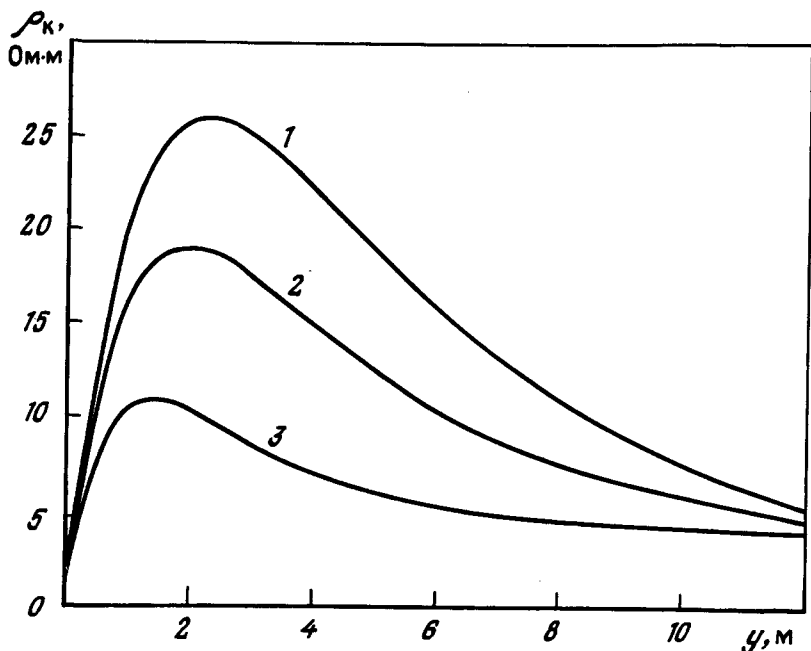


Рис. 5.4. Распределение кажущегося электрического удельного сопротивления потенциал-зонда вдоль оси скважины в изотропном пласте. Толщина пласта $h=3$ м, радиус скважины $r_c=0,3$ м

Сильная зависимость кривых кажущегося сопротивления также и от параметра анизотропии электропроводности пласта α обеспечивает высокую эффективность применения метода БКЗ при геофизических исследованиях горизонтальных нефтяных и газовых скважин.

5.4. ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ЗОНДИРОВАНИЕ СТЕЛОВ С АЗИМУТАЛЬНОЙ СИММЕТРИЕЙ ОКОЛОСКВАЖИННЫХ ЗОН

Наиболее широко применяемые стандартные зонды метода сопротивления состоят из трех электродов, располагаемых вдоль оси (вертикальной) скважины на некотором расстоянии один от другого. Через электрод A малых размеров пропуска-

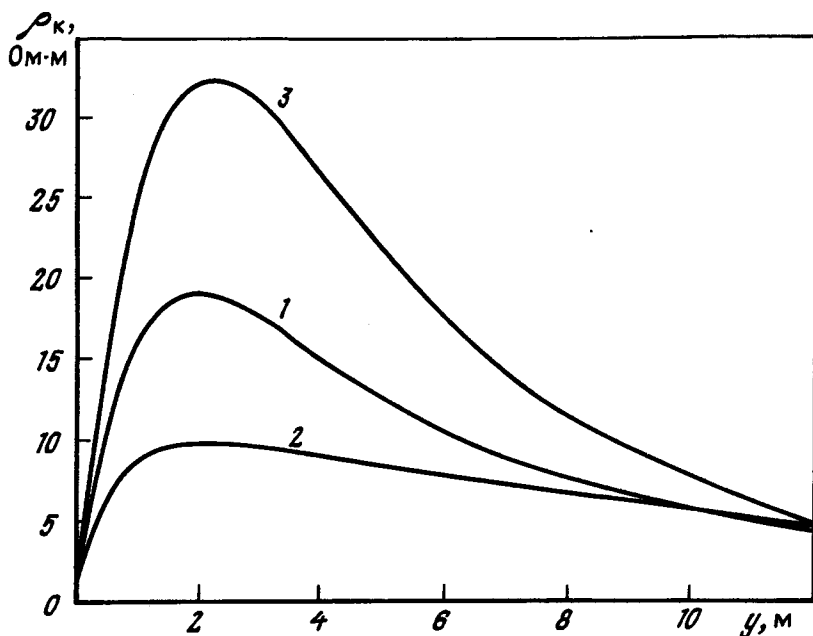


Рис. 5.5. Распределение кажущегося электрического удельного сопротивления потенциал-зонда вдоль оси скважины в анизотропном пласте.

Толщина пласта $h=3$ м, радиус скважины $r_c=0,3$ м:

1 — $\sigma_{z2}/\sigma_{r2}=1$; 2 — $\sigma_{z2}/\sigma_{r2}=4$; 3 — $\sigma_{z2}/\sigma_{r2}=0,25$

ют постоянный ток $I=\text{const}$, создающий электрическое поле в окружающей породе, электроды M и N являются измерительными, второй питающий электрод находится у поверхности земли, так что поле вокруг электрода A можно считать полем одного точечного электрода. В случае однородной среды с удельным сопротивлением ρ_n распределение потенциала электрического поля вокруг электрода A , как известно, описывается выражением:

$$U = I\rho_n / (4\pi R), \quad R = (r^2 + z^2)^{1/2},$$

где r, z — цилиндрические координаты, начало координат находится в точке A , ось z направлена вертикально вверх.

При этом плотность электрического тока $\vec{J}$ в среде связана с потенциалом электрического поля соотношением

$$\vec{J} = -\frac{1}{\rho_n} \text{grad } U.$$

В общем случае среда, в которой проводятся измерения, неоднородна. Зонд находится в скважине, заполненной глинистым раствором, удельное сопротивление которого отличается от удельного сопротивления пласта ρ_n , подлежащего определению. В результате образования зоны проникновения удельное сопротивление околоскважинного пространства неоднородно по пространству. Выше и ниже пласта могут находиться породы с другим удельным сопротивлением. Однако и в этом случае используют формулу, связывающую удельное сопротивление однородной среды и потенциал электрического поля, измеряемый на оси скважины, $r=0$, определяя так называемое кажущееся удельное сопротивление

$$\rho_k = \frac{4\pi z}{I} U(0, z).$$

При перемещении зонда вдоль скважины получают кривые зависимости $\rho_k(z)$, по которым судят об удельном сопротивлении окружающих скважину пород. Для возможности количественной интерпретации полученных диаграмм необходимо знать факторы, определяющие отличие ρ_k от истинных значений ρ_n пород. К таким факторам относятся: наличие в скважине глинистого раствора, существование в околоскважинной зоне зоны проникновения глинистого раствора, мощность пласта.

В данном разделе рассматривается гибридный метод решения задачи нахождения методом БКЗ кажущегося сопротивления породы вдоль оси скважины при произвольном азимутально симметричном распределении удельного сопротивления $\rho_{zn}(r)$ в зоне проникновения. Величина $\rho_{zn}(r)$ связана однозначной функциональной зависимостью с коэффициентом водонасыщенности $S(r)$, определение которого является результатом решения задачи о формировании зоны проникновения.

Изучение коллекторов нефти и газа электрическими методами основано на существовании связи между удельным сопротивлением пород, сопротивлением поровых жидкостей, пористостью, количеством жидкости, заключенной в порах. Используется основное соотношение [2]:

$$\rho_n = \rho_n P_n \rho_k,$$

где ρ_n — удельное электрическое сопротивление пласта (коллектора), P_n — параметр пористости, обычно принимается рав-

ным $0,62 m^{-2,15}$ (m — абсолютная пористость породы, определяемая как отношение объема всех пустот в породе к ее общему объему); P_n — параметр насыщения, равный S^{-2} (S — коэффициент насыщенности жидкостью, равный отношению объема заполненных жидкостью пор к общему объему порового пространства); $\rho_{\text{ж}}$ — удельное сопротивление пластовой жидкости [10].

Одним из главных параметров, используемых при подсчете запасов нефти и газа, является пористость [5]. Для определения пористости прежде всего используют данные электрического каротажа по методу сопротивления. Основой для этого является однозначная зависимость параметра пористости P_n от m . Например, для определения $P_n(m)$ водоносного пласта исходят из основного соотношения:

$$P_n(m) = \rho_{\text{зп}}(r, z, t) / \rho_{\text{см}}(r, z, t),$$

где $\rho_{\text{зп}}(r, z, t)$ — электрическое удельное сопротивление пласта в зоне проникновения глинистого раствора определяется по данным электрического каротажа; $\rho_{\text{см}}(r, z, t)$ — электрическое удельное сопротивление смеси пластовой воды и фильтрата глинистого раствора:

$$1/\rho_{\text{см}} = (1 - S)/\rho_{\text{в}} + S/\rho_{\text{ф}},$$

значение $S = V_{\text{ф}}/(V_{\text{ф}} + V_{\text{в}})$ определяется из решения задачи о динамике формирования зоны проникновения, $V_{\text{ф}}$ и $V_{\text{в}}$ соответственно объемы фильтрата глинистого раствора и невытесненной пластовой воды в единице порового пространства; $\rho_{\text{в}}$ — удельное сопротивление пластовой воды.

Для более эффективного анализа результатов БКЗ необходимо иметь комплексное решение ряда задач: это формирование зоны проникновения распределения удельного электрического сопротивления и потенциала постоянного электрического поля в прискважинном пространстве.

Предположим, что область распределения потенциала электрического поля состоит из скважины радиуса r_0 , заполненной глинистым раствором с удельным сопротивлением $\rho_{\text{с}}$, зоны проникновения радиуса $r_{\text{зп}}$ с удельным сопротивлением $\rho_{\text{зп}}(r)$, произвольно меняющимся в радиальном направлении, и неизменяющейся части пласта с удельным сопротивлением $\rho_{\text{п}}$ при $r \geq r_{\text{зп}}$.

Введем цилиндрическую систему координат r', z', φ . Выберем в качестве единицы длины радиус скважины, т. е. положим

$r=r'/r_c$ и $z=z'/r_c$. Пусть ось z направлена по оси скважины, точечный источник тока находится в начале координат и рассматриваемая область обладает осевой симметрией. В этом случае потенциал электрического поля U будет зависеть только от координат z и r и удовлетворять уравнению Лапласа:

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[\sigma(r) \frac{\partial U(r, z)}{\partial z} \right] + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \sigma(r) \frac{\partial U(r, z)}{\partial r} \right] = 0. \quad (5.4)$$

Представим функцию $U(r, z)$ в виде интеграла Фурье относительно переменной z :

$$U(r, z) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} W(r, \lambda) \cos(\lambda z) d\lambda. \quad (5.5)$$

Из (5.4), (5.5) следует, что функция должна удовлетворять следующему уравнению:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \sigma(r) \frac{\partial W}{\partial r} \right] - \sigma(r) \lambda^2 W = 0. \quad (5.6)$$

Общим решением уравнения (5.6) в области, где коэффициент $\sigma(r)$ сохраняет постоянное значение (т. е. при $r < 1$ и при $r > r_{\text{зн}}$), является выражение

$$W(r, \lambda) = A(\lambda) I_0(\lambda r) + B(\lambda) K_0(\lambda r), \quad (5.7)$$

где I_0 и K_0 — модифицированные функции Бесселя первого и второго рода нулевого порядка.

Общее решение (5.7) будет в дальнейшем использовано при постановке краевых условий для нахождения решения уравнения (5.6) на отрезке $1 \leq r \leq r_{\text{зн}}$ при произвольной функции $\sigma(r)$.

Для получения краевого условия на стенке скважины, т. е. при $r=1$, надо воспользоваться общим решением (5.7), соответствующим области внутри скважины, $0 \leq r \leq 1$, а также условиями непрерывности электрического тока и потенциала электрического поля на стенке скважины. Заметим, что поскольку в начале координат расположен точечный источник тока, то потенциал в окрестности этой точки должен вести себя как функция $1/R$, где $R = (r^2 + z^2)^{1/2}$:

$$U(r, z) = M \left[\frac{1}{R} + \Phi(r, z) \right]. \quad (5.8)$$

Здесь $M = \frac{I \rho_c}{4\pi r_c}$, где I — полная сила тока; $\Phi(r, z)$ — ограниченная функция.

На основании известного представления

$$1/R = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} K_0(\lambda r) \cos(\lambda r) d\lambda$$

с помощью соотношения (5.8) нетрудно установить, что коэффициент $B(\lambda)$ в (5.7) равен 1 при $0 \leq r \leq 1$:

$$W(r, \lambda) = A(\lambda) I_0(\lambda r) + K_0(\lambda r), \quad 0 \leq r \leq 1. \quad (5.9)$$

Отсюда и из условий непрерывности потенциала и тока в точке $r = 1$ приходим к следующему краевому условию:

$$\frac{\sigma(r+0)}{\sigma(r-0)} \frac{\partial W}{\partial r} = \alpha(\lambda) W(r, \lambda) - \beta(\lambda), \quad r = 1, \quad (5.10)$$

$$\alpha(\lambda) = \lambda I_1(\lambda) / I_0(\lambda), \quad \beta(\lambda) = 1 / I_0(\lambda),$$

где $I_1(\lambda)$ — модифицированная функция Бесселя первого рода первого порядка.

Для получения краевого условия при $r = r_{\text{зн}}$ необходимо учесть, что потенциал $U(r, z)$ должен стремиться к нулю при $r \rightarrow \infty$. Это возможно лишь при условии, что коэффициент $A(\lambda)$ в (5.7) равен нулю, так как функция Бесселя $I_0(\lambda r)$ при больших значениях аргумента ведет себя как $I_0(\lambda r) \approx \exp(\lambda r) / \sqrt{2\pi\lambda r}$ [7]. Следовательно,

$$W(r, \lambda) = B(\lambda) K_0(\lambda r), \quad r_{\text{зн}} \leq r \leq \infty. \quad (5.11)$$

Отсюда и из условий непрерывности потенциала и тока в точке $r = r_{\text{зн}}$ находим следующее краевое условие:

$$\frac{\partial W}{\partial r} = -\kappa(\lambda) W(r, \lambda), \quad r = r_{\text{зн}}, \quad (5.12)$$

$$\kappa(\lambda) = \lambda K_1(\lambda r_{\text{зн}}) / K_0(\lambda r_{\text{зн}}),$$

где K_1 — модифицированная функция Бесселя второго рода первого порядка.

Решения дифференциального уравнения (5.6) с краевыми условиями (5.10), (5.12) на отрезке $1 \leq r \leq r_{\text{зн}}$ можно найти численно, например, с помощью метода конечных разностей.

Поскольку измерительные электроды расположены на оси z , то необходимо определить значения потенциала $U(r, z)$ в произвольной точке z при $r=0$. Для этого, используя решение (5.9) и преобразование (5.5), получим:

$$U(z, 0) = M \left[\frac{1}{z} + \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} A(\lambda) \cos(\lambda z) d\lambda \right]. \quad (5.13)$$

Коэффициент $A(\lambda)$ находят из соотношения (5.9) на основании условия непрерывности потенциала на стенке скважины, используя численное решение уравнения (5.6) при $1 \leq r \leq r_{\text{зн}}$:

$$A(\lambda) = [W(1, \lambda) - K_0(\lambda)/I_0(\lambda)]. \quad (5.14)$$

При вычислении интеграла (5.13) надо учитывать поведение функции $A(\lambda)$ при $\lambda \rightarrow \infty$. Для выяснения этого вопроса рассмотрим асимптотическое решение уравнения (5.6) в виде степенного ряда по параметру λ :

$$W(r, \lambda) = \exp[i\lambda S(r)] \sum_{j=0}^{\infty} a_j(r) (i\lambda)^{-j}, \quad a_0(r) \neq 0.$$

Главные члены этого асимптотического разложения равны:

$$W_{\pm}(r, \lambda) = C_{\pm} \varphi^{-1/2}(r) e^{\pm \lambda r} [1 + O(\lambda^{-1})], \quad \varphi(r) = r\sigma(r).$$

Решение задачи (5.6), (5.10), (5.12) ищем в виде

$$W(r, z) = C_+ W_+ + C_- W_-,$$

где константы $C_{\pm}$ определяются с помощью граничных условий (5.10) и (5.12). При $\lambda \rightarrow \infty$ решение задачи имеет вид:

$$W(r, \lambda) = \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^{1/2} \frac{\exp(-\lambda r)}{1 + \sigma(1+0)/\sigma(1-0)} \frac{\varphi(r)}{\varphi(1)} [1 + O(\lambda^{-1})]. \quad (5.15)$$

Отсюда видно, что решение задачи (5.6), (5.10), (5.12) при $\lambda \rightarrow \infty$ равномерно по r на любом конечном отрезке $[1 \leq r \leq R]$ стремится к нулю. Из (5.14), (5.15) получаем асимптотику функции $A(\lambda)$ при $\lambda \rightarrow \infty$ ($K_0(\lambda) \approx \exp(-\lambda) \sqrt{\pi/(2\lambda)}$):

$$A(\lambda) \approx e^{-2\lambda} \left[\frac{1}{1 + \sigma(1+0)/\sigma(1-0)} + \frac{1}{2} \right].$$

Приведенный здесь метод решения краевых задач был обобщен и применялся для решения многомерных задач электрического зондирования неоднородных сред.

К ГЛАВЕ 1

1. Бахрах Л. Д., Ярмахов И. Г. Исследование дифракции электромагнитных волн на щелях в экранах конечной толщины // Радиотехника и электроника.— 1993.— Т. 38.— № 2.— С. 213—218.
2. Бреховских Л. М. Волны в слоистых средах.— М.: Наука, 1973.
3. Ваганов Р. Б., Каценеленбаум Б. З. Основы теории дифракции.— М.: Наука, 1982.
4. Вайнштейн Л. А. Дифракция электромагнитных и звуковых волн на открытом конце волновода.— М.: Советское радио, 1953.
5. Вайнштейн Л. А. Электромагнитные волны.— М.: Радио и связь, 1988.
6. Васильев Е. Н., Солодухов В. В. Дифракция электромагнитных волн на диэлектрическом клине // Изв. вузов. Радиофизика.— 1974.— Т. 17.— № 10.— С. 15—18.
7. Галишикова Т. Н., Ильинский А. С. Численные методы в задачах дифракции.— М.: МГУ, 1987.
8. Гринберг Г. А. Метод решения задач дифракции электромагнитных волн на идеально проводящих плоских экранах, основанный на изучении наводимых на экранах теневых токов // Журнал технической физики.— 1958.— Т. 28.— № 3.— С. 542.
9. Дворецкий П. И., Ярмахов И. Г. Электродинамическая модель радиоволнового просвечивания для выявления и оценки нефтегазоносных пластов в осадочной толще // Доклады Академии наук.— 1994.— Т. 335.— № 5.— С. 637—639.
10. Дмитриев В. И., Захаров Е. В. Интегральные уравнения в краевых задачах электродинамики.— М.: МГУ, 1987.
11. Захаров Е. В., Ярмахов И. Г. Дифракция электромагнитных волн на краях импедансных тел // Радиотехника и электроника.— 1992.— Т. 37.— № 3.— С. 412—418.
12. Зоммерфельд А. Оптика.— М.: Иностранная литература, 1953.
13. Ильинский А. С., Слепян Г. Я. Импедансные граничные условия и их применение для расчета поглощения электромагнитных волн в проводящих средах // Радиотехника и электроника.— 1990.— Т. 35.— № 6.— С. 1121.
14. Леонтович М. А. // Исследования по распространению волн. Сб. 2.— М.: Изд-во АН СССР.— 1948.— С. 5.
15. Малюжинец Г. Д. // Докл. АН СССР.— 1958.— Т. 118.— № 6.— С. 1099.
16. Медьеш-Митшанг Л. Н., Ван Даосин. Гибридные методы анализа отражений от объектов сложной формы // ТИИЭР.— 1989.— Т. 77.— № 5.— С. 147.
17. Нефедов Е. И. Дифракция электромагнитных волн на диэлектрических структурах.— М.: Наука, 1979.
18. Уфимцев П. Я. Метод краевых волн в физической теории дифракции.— М.: Советское радио, 1962.

19. Фок В. А. Проблемы дифракции и распространения электромагнитных волн.—М.: Советское радио, 1970.
20. Фельд Я. Н. // Радиотехника и электроника.—1974.—Т. 19.—№ 5.—С. 927.
21. Шевченко В. В. Плавные переходы в открытых волноводах.—М.: Наука, 1969.
22. Ярмахов И. Г. Исследование дифракции электромагнитных волн на идеально проводящем и импедансном клиньях со скругленными кромками // Радиотехника и электроника.—1991.—Т. 36.—№ 10.—С. 1887.
23. Barkeshli K., Volakis J. Improving the convergence rate of the conjugate gradient FFT method using subdomain basis functions // IEEE Trans. Antennas Propagat.—1989.—Vol. 37.—N 7.—P. 893.
24. Butler C. M., Xu X.-B., Glisson A. W. Current Induced on a Conducting Cylinder Located Near the Planar Interface Between Two Semi-Infinite Half-Spaces // IEEE Trans. Antennas Propagat.—1985.—Vol. 33.—N 6.—P. 616—624; // IEEE Trans. Antennas Propagat.—1986.—Vol. 34.—N 7.—P. 880—890.
25. Dvoretzki P. I., Iarmakhov I. G., Mitrofanov V. Elektromagnetic Inverse Scattering Problems for Inhomogeneous Lossy Media // Proceedings of the Third International Workshop on Radar Polarimetry.—Nantes, France.—1995.—Vol. 1.—P. 198—204.
26. Dvoretzki P. I., Iarmakhov I. G. Algorithms for computing of the electrical properties and position of dielectric objects embedded in lossy media // URSI Proceedings of the International Symposium on electromagnetic theory.—St. Petersburg. Proceedings.—1995.—P. 258—260.
27. Dvoretzki P. I., Iarmakhov I. G. Numerical techniques for computing of the electromagnetic scattering by objects with edges // URSI International Symposium on ELECTROMAGNETIC THEORY, St. Petersburg. Proceedings.—1995.—P. 470—472.
28. Elsherbeni A. Z., Hamid M. A. K. Diffraction by a wide double wedge // IEEE Trans. Antennas Propagat.—1984.—Vol. 32.—N 11.—P. 1262.
29. Elsherbeni A. Z., Hamid M. A. K. Diffraction by a wide double wedge with rounded edges // IEEE Trans. Antennas Propagat.—1985.—Vol. 33.—N 9.—P. 1012.
30. Harrington R. F., Mautz J. R. // IEEE Trans. Antennas Propagat.—1976.—Vol. 24.—N 11.—P. 870.
31. Harrington R. F., Mautz J. R. An impedance sheet approximation for thin dielectric shells // IEEE Trans. Antennas Propagat.—1975.—Vol. 23.—P. 531.
32. Iarmakhov I. G. Electromagnetic scattering by unclosed sheets and by slots in conducting screens // International Confer. RADAR-94.—Paris, France, 1994, Proceedings Radar-94.—P. 68—71.
33. Jin J. M., Liepa V. V. // Electromagnetics.—1989.—Vol. 9.—N 2.—P. 201.
34. Leviatan Y. // IEEE Trans.—1988.—Vol. MTT-36.—N 1.—P. 44.
35. Leviatan Y., Hudis E., Einziger P. D. // IEEE Trans. Antennas Propagat.—1989.—Vol. 37.—N 12.—P. 1537.
36. Lindel I. V., Alanen E. Exact Image Theory for the Sommerfeld Half-Space Problem, Part III: General Formulation // IEEE Trans. Antennas Propagat.—1984.—Vol. 32.—N 10.—P. 1027—1032.
37. Morita N. Diffraction by arbitrary cross-sectional semi-infinite conductor // IEEE Trans. Antennas Propagat.—1971.—Vol. 19.—N 3.—P. 358.
38. Rojas R. G. Electromagnetic diffraction of an obliquely incident plane wave field by a wedge with impedance faces // IEEE Trans. Antennas Propagat.—1988.—Vol. 36.—N 7.—P. 956.
39. Ross R. A., Hamid M. A. K. // IEEE Trans. Antennas Propagat.—1971.—Vol. 19.—N 4.—P. 507.

40. Senior T. B. A. Backscattering from resistive strips // IEEE Trans. Antennas Propagat.—1979.—Vol. 27.—P. 808.
41. Senior T. B. A., Volakis J. Sheet simulation of a thin dielectric layer // Radio Sci.—1987.—Vol. 22.—N 7.—P. 1261.
42. Senior T., Volakis J. L. // IEEE Trans. Antennas Propagat.—1989.—Vol. 37.—N 12.—P. 1566.
43. Wu T. K., Tsai L. L. Scattering by arbitrarily cross-sectioned layered lossy dielectric cylinders // IEEE Trans. Antennas Propagat.—1977.—Vol. 25.—N 4.—P. 570.

К ГЛАВЕ 2

1. Азиз Х., Семтари Э. Математическое моделирование пластовых систем.—М.: Недра, 1982.
2. Алиев З. С., Шеремет В. В. Определение производительности горизонтальных скважин, вскрывших газовые и газонефтяные пласты.—М.: Недра, 1995.
3. Арманд Н. А., Ярмахов И. Г. Дифракция электромагнитных волн на диэлектрических и идеально проводящих экранах и щелях // Радиотехника и электроника.—1993.—Т. 38.—№ 8.—С. 1389—1399.
4. Баренблатт Г. И., Ентов В. М., Рыжик В. М. Движение жидкостей и газов в пористых средах.—М.: Недра, 1984.
5. Басниев К. С., Кочина И. Н., Максимов В. М. Подземная гидродинамика.—М.: Недра, 1993.
6. Борисов Ю. П., Пилатовский В. П., Табаков В. П. Разработка месторождений горизонтальными и многозабойными скважинами.—М.: Недра, 1964.
7. Говард А. К., Кречмар Дж. // ТИИЭР.—1986.—Т. 74.—№ 2.—С. 127—135.
8. Дайнс К. А., Лайтл Р. Дж. Машинная томография в геофизике // ТИИЭР.—1979.—Т. 67.—№ 7.—С. 103—112.
9. Дворецкий П. И., Попов С. Б., Ярмахов И. Г. Моделирование разработки газонасыщенных низкопроницаемых коллекторов горизонтальными скважинами // Горный вестник.—1996.—№ 4.—С. 28—36.
10. Дворецкий П. И., Попов С. Б., Ярмахов И. Г. Применение систем горизонтальных скважин для разработки газовых и нефтяных месторождений // Горный вестник.—1997.—№ 3.—С. 24—32.
11. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного.—5-е изд., испр.—М.: Наука, 1987.
12. Михайлов Н. Н. Информационно-технологическая геодинамика околоскважинных зон.—М.: Недра, 1996.
13. Полубарина-Кочина П. Я. Теория движения грунтовых вод.—М.: Наука, 1977.
14. Самарский А. А. Теория разностных схем.—М.: Наука, 1977.
15. Черных В. А. Новая математическая модель стационарного притока реального газа к необсаженной горизонтальной скважине // Научно-методические и технологические проблемы разработки месторождений со сложными геологическими условиями.—М.: ВНИИГАЗ, 1990.—С. 22—28.
16. Asheim H. Horizontal Well Inflow Petroleum. Preliminary version // Compendium. Norway, NTNU.—1996.
17. Dikken B. J. Pressure Drop in Horizontal Wells and its Effect on Production Performance // JPT.—Nov. 1990.—P. 1426—1433.
18. Giger F. M. Reduction Du Nombre de Puits Par L'utilisation de Forages Horizontaux // Revue de l'institute Fr. du Pétrole.—1983.—Vol. 38.—N 3.

19. Kersaw D. S. The Incomplete Cholesky — Conjugate Gradient Method for the Iterative Solution of System of Linear Equations // J. of Comput. Phys. — 1978. — Vol. 26. — P. 43—65.
20. Harrington R. F., Mautz J. R. An Impedance sheet approximation for thin dielectric shells // IEEE Trans. Antennas Propagat. — 1975. — Vol. 23. — N 4. — P. 531—534.
21. Senior T. B. A., Volakis J. Sheet simulation of a thin dielectric layer // Radio Sci. — 1987. — Vol. 22. — N 7. — P. 1261—1272.

К ГЛАВЕ 3

1. Алексеев В. М., Тихомиров В. М., Фомин С. В. Оптимальное управление. — М.: Наука, 1979.
2. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. — М.: Наука, 1967.
3. Дахнов В. Н. Геофизические методы определения коллекторских свойств и нефтегазонасыщенности горных пород. — М.: Недра, 1975.
4. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ. — М.: Наука, 1977.
5. Комаров С. Г. Геофизические методы исследования скважин. — М.: Недра, 1973.
6. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. — М.: Наука, 1972.
7. Коллинз Р. Течение жидкостей через пористые материалы. — М.: Мир, 1964.
8. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика. — М.: Физматгиз, 1963. — Ч. 1—2.
9. Кучеров Р. А. К расчету поля зондов бокового каротажа в пластах ограниченной мощности при наличии скважины // Сер. Геология и разведка. Изв. вузов. — 1980. — № 7. — С. 271—291.
10. Латин А. В., Ляшко А. Д. О сходимости разностных схем для квазилинейных уравнений, параболических на решении // Изв. вузов. Математика. — 1975. — № 12. — С. 30—42.
11. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. — М.: Гостехиздат, 1954.
12. Ладыжская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. — М.: Наука, 1967.
13. Олейник О. Л., Кружков С. Н. Квазилинейные параболические уравнения второго порядка со многими независимыми переменными // УМН. — 1961. — Т. 16. — Вып. 5 (101). — С. 115—155.
14. Пирсон С. Д. Учение о нефтяном пласте. — М.: Гостоптехиздат, 1961.
15. Пирсон С. Д. Справочник интерпретации данных каротажа. — М.: Недра, 1966.
16. Роджерс В. Ф. Состав и свойства промысловых жидкостей. — М.: Гостоптехиздат, 1967.
17. Самарский А. А., Попов Ю. П. Разностные схемы газовой динамики. — М.: Наука, 1975.
18. Самарский А. А. Теория разностных схем. — М.: Наука, 1977.
19. Ярмахов И. Г., Логинов И. В., Сохранов Н. Н., Вендельштейн Б. Ю. Численное решение задачи формирования зоны проникновения // Прикладная геофизика. — М.: Недра. — 1977. — Вып. 89. — С. 135—142.
20. Ярмахов И. Г. Численное исследование процесса формирования зоны проникновения промысловой жидкости // Численные методы в геофизике. — М.: Изд-во МГУ. — 1979. — С. 87—104.

21. Douglas J., Peaceman D. W., Rachford H. H. A Method for Calculating Multidimensional Immiscible Displacement // Trans. AIME.— 1959.— Vol. 216.— P. 297—308.

22. Garder A. O., Peaceman D. W., Pozzi A. L. Numerical Calculation of Multidimensional Miscible Displacement by the Method of Characteristics // Soc. Pet. Eng. J.— 1964.— Vol. 4.— P. 26—36.

23. Peaceman D. W., Rachford H. H. Numerical Calculation of Multidimensional Miscible Displacement // Soc. Pet. Eng. J.— 1962.— Vol. 2.— P. 327—339.

К ГЛАВЕ 4

1. Баррел Дж. А., Питерс Л. Распространение низкочастотных видеоимпульсов в средах с потерями // ТИИЭР.— 1979.— Т. 67.— № 7.— С. 6.

2. Бреховских Л. М. Волны в слоистых средах.— М.: Наука, 1973.

3. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений.— 4-е изд.— М.: Физматгиз, 1962.

4. Дворецкий П. И., Попов С. Б., Ярмахов И. Г. Исследование распространения электромагнитных импульсов в слоисто-неоднородных средах с потерями // Радиотехника и электроника.— 1996.— Т. 41.— № 12.— С. 1448—1461.

5. Дворецкий П. И., Ярмахов И. Г. Проблемы фильтрации и электродинамики при геофизических исследованиях горизонтальных нефтегазовых скважин // Доклады Академии наук.— 1995.— Т. 343.— № 5.— С. 684—686.

6. Диткин В. А., Прудников А. П. Справочник по операционному исчислению.— М.: Высшая школа, 1965.

7. Зоммерфельд А. Дифференциальные уравнения в частных производных физики.— М.: ИЛ, 1950.

8. Каценеленбаум Б. 3. // ЖТФ.— 1949.— Т. 19.— № 10.— С. 1168.

9. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа.— 4-е изд.— М.: Наука, 1976.

10. Марков Г. Т., Чаплин А. Ф. Возбуждение электромагнитных волн.— М.: Энергия, 1967.

11. Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды. Специальные функции.— М.: Наука, 1983.

12. Справочник по специальным функциям / Под ред. М. Абрамовиц, И. Стиган.— М.: Наука, 1979.

13. Уэйт Дж. Р. Геоэлектромагнетизм.— М.: Недра, 1987.

14. Чжань Л. Ч., Моффет Д. Л., Питерс Л. Определение характеристик подповерхностных радиолокационных объектов // ТИИЭР.— 1979.— Т. 67.— № 7.— С. 18.

15. Шевченко В. В. Плавные переходы в открытых волноводах.— М.: Наука, 1969.

16. Baños A., Jr. Dipole Radiation in the Presence of a Conducting Half-Space.— Oxford, England: Pergamon Press, 1966.

17. Haddad H., Chang D. C. Transient Electromagnetic Field Generated by a Vertical Electric Dipole on the Surface of a Dissipative Earth // Radio Sci.— 1981.— Vol. 16.— N 2.— P. 169—177.

18. King R. W. P. Electromagnetic Field of a Vertical Dipole Over an Conducting Half-Space // Radio Sci.— 1990.— Vol. 25.— N 2.— P. 149—160.

19. Kong J. A. Electromagnetic Wave Theory. John Wiley & Sons, 1986.

20. Parhami P., Rahmat-Samii Y., Mittra R. An Afficient Approach for Evaluating Sommerfeld Integrals Encounted in the Problem of a Current Element

Radiating over Lossy Ground // IEEE Trans. Antennas Propagat.—1980.—Vol. 28.—N 1.—P. 100—104.

21. Wait J. R. Electromagnetic Radiation from Cylindrical Structures.—Oxford, New York: Pergamon Press, 1959.

К ГЛАВЕ 5

1. Бурсин В. Р. Теория электромагнитных полей, применяемых в электроразведке.—Л.: Недра, 1972.

2. Дахнов В. Н. Геофизические методы определения коллекторских свойств и нефтегазонасыщенности горных пород.—М.: Недра, 1975.

3. Дворецкий П. И., Ярмахов И. Г. Проблемы фильтрации и электродинамики при геофизических исследованиях горизонтальных нефтегазовых скважин // Доклады Академии наук.—1995.—Т. 343.—№ 5.—С. 684—686.

4. Комаров С. Г. Геофизические методы исследования скважин.—М.: Недра, 1973.

5. Михайлов Н. Н. Информационно-технологическая геодинамика около-скважинных зон.—М.: Недра, 1996.

6. Самарский А. А. Теория разностных схем.—М.: Наука, 1977.

7. Справочник по специальным функциям / Под ред. М. Абрамовиц, И. Стиган.—М.: Наука, 1979.

8. Тихонов А. Н. О единственности решения задачи электроразведки // Доклады Академии наук.—1949.—Т. 69.—№ 6.—С. 797.

9. Уэйт Дж. Р. Геоэлектромагнетизм.—М.: Недра, 1987.

10. Ярмахов И. Г. Численное исследование процесса формирования зоны проникновения промысловой жидкости // В сб. Численные методы в геофизике.—М.: МГУ, 1979.

11. Al'pin L. M., Berdichevskii M. N., Vedrintsev G. A. and A. M. Zagarmistr. Dipole Methods for Measuring Earth Conductivity (English trans. by G. V. Keller).—Consultant's Bureau, New York, 1966.

12. Stefanescu S. S., Schlumberger C., Schlumberger M. Sur la distribution electricue potentielle autor d'unt prise de terre ponctuelle dans un terrain a couche horisontales, homogenes et isotropes // J. Phys. Radium 1, 132—140, 1930.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	5
Глава 1. Электродинамические модели радиопросвечивания для выявления и оценки нефтегазоносных пластов в осадочной толще	7
1.1. Метод тонких оболочек	7
1.2. Трехмерные модели тонких оболочек	10
1.3. Двухмерные модели	25
1.4. Анализ электромагнитных полей на границах раздела двух сред и внутри пластов	35
1.5. Гибридные методы теории дифракции на кромках пластов	59
1.6. Дифракция на кромках проводящих полубесконечных тел	61
1.7. Квазитрехмерные модели дифракции на кромках пластов	71
1.8. Электромагнитное взаимодействие кромок пластов	80
Глава 2. Моделирование разработки нефтегазонасыщенных коллекторов горизонтальными скважинами	90
2.1. Формулировка задачи	92
2.2. Вычислительный алгоритм	96
2.3. Одномерное приближение	98
2.4. Результаты численных двухмерных расчетов	102
2.5. Формулировка задачи однофазной фильтрации	103
2.6. Примеры решения задач однофазной фильтрации	106
2.7. Аналитические методы исследования притока флюида к горизонтальным скважинам	112
2.8. Концевой эффект при работе горизонтальных скважин	118
2.9. Приток к системам горизонтальных скважин	120
2.10. Контроль за разработкой месторождений нефти и газа с помощью радиопросвечивания	141
Глава 3. Формирование зоны проникновения в окрестности вертикальных и горизонтальных скважин	148
3.1. Особенности формирования зоны проникновения	148
3.2. Математические модели процесса формирования зоны проникновения в водоносных и нефтегазоносных пластах	151
3.3. Существование решения и устойчивость нелинейных разностных схем для уравнений фильтрации	166
3.4. Результаты численного моделирования	179
3.5. Одномерные модели формирования зоны проникновения в окрестности горизонтальных скважин	187
Глава 4. Электромагнитные зонды с цилиндрической антенной решеткой для азимутального исследования околоскважинных зон	196
4.1. Двухмерные математические модели распространения электромагнитных импульсов	199
4.2. Двухслойные, двухмерные (2D) модели зондов СКИ	216
4.3. Аналитическое исследование двухмерной модели зонда СКИ в двухслойной среде	227
	317

4.4. Трехмерные модели зондов СКИ в трехслойных средах	239
4.5. Аналитическое исследование трехмерных моделей зондов СКИ в двухслойной среде	257
4.6. Стационарные режимы работы электромагнитных зондов с азимутально неоднородным возбуждением	277
Глава 5. Электрическое зондирование горизонтальных скважин с применением обычных зондов бокового каротажа	294
5.1. Математическое моделирование поля точечного источника постоянного тока в горизонтальной скважине в анизотропной среде	294
5.2. Аналитическое решение для точечного источника в трехслойной анизотропной среде	297
5.3. Анализ кажущегося удельного сопротивления в анизотропных пластах	302
5.4. Электрическое зондирование стволов с азимутальной симметрией околоскважинных зон	304
Список литературы	311

НАУЧНОЕ ИЗДАНИЕ

**Дворецкий Петр Иванович
Ярмахов Игорь Глебович**

**ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ
И ГИДРОДИНАМИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ
ПРИ ОСВОЕНИИ
НЕФТЕГАЗОВЫХ МЕСТОРОЖДЕНИЙ**

*Заведующий редакцией Т. К. Рубинская
Редактор издательства А. И. Вороновская
Переплет художника Н. П. Новиковой
Художественный редактор Н. П. Новикова
Технический редактор Л. Н. Фомина
Корректоры Е. И. Микрякова, Л. Н. Пантелеева*

Изд. лиц. № 010145 от 24.12.92. Лицензия продлена до 23 декабря 2002 г.
Подписано в печать 23.03.98. Формат 60 × 88¹/₁₆. Гарнитура Таймс. Печать
офсетная. Усл. печ. л. 19,6. Уч.-изд. л. 22,19. Тираж 630 экз.

Заказ № 3492/4540-2

Набор выполнен на компьютерной технике

ОАО «Издательство «Недра». 125047 Москва, Тверская застава, 3

Набрано на Государственном ордена Октябрьской Революции, ордена Трудового Красного Знамени Московском предприятии «Первая Образцовая типография» Государственного комитета Российской Федерации по печати.
113054 Москва, Валовая, 28

Отпечатано в Московской типографии «Наука» РАН. 121099 Москва,
Шубинский пер., 6